

《數學大騷動》—腳踏車與數學

輔導團：臺北市國中數學輔導團

臺北市興雅國中 林壽福

壹、設計說明

綜合舉辦 *PIRLS* 和 *PISA* 兩個教育評比的國際組織對閱讀素養的定義，閱讀教學活動應該：

- 培養學生理解、運用和反思書寫語言的能力；
- 能從各式各樣的文章中（包括連貫的文本和不連貫的文本）建構出意義；
- 能從閱讀中學習；
- 能參與學校及生活中閱讀社群的活動，發展個人潛能，並能積極參與社區活動；
- 最後，能從閱讀獲得樂趣。

因此，本次測驗所設計工具，即企圖評量學生能力如下列：專注提取、理解監控、歸納推論、詮釋整合、組織聯想、分析綜合等。我們希望他們閱讀時，

- 能專注地提取特定觀點，詮釋文意；
- 能自然地意識到自己是否理解文本內容，並能主動採取一些補救策略；
- 在回答問題時，能運用聯想力作歸納推論，找出概念間的關係；
- 在作文章摘要、勾勒重點時，能統整文本脈絡和同化自我的新舊知識經驗，並能預測下一段文章的內容。
- 能檢驗或評估文本的特性與風格；能透過擬題與解題過程中，深化對文本的理解，並與同儕間作互動學習，經歷社會化情境，最後還能從閱讀中找到樂趣。

貳、閱讀測驗參考解答

- (1) 為何說腳踏車的車體以三角形為結構，最不容易被騎乘者的體重壓垮？請再列舉生活中類似原裡的設計案例兩個，並加以說明。（專注、理解監控、應用、聯想）

答：(1) 三角形是平面圖形中唯一的穩定結構。因為三邊長一旦圍成三角形後，三角形的大小和形狀便不再改變，並且以固定長度的三邊所形成的三角形，都會全等。

(2) 青椒內部有向內隆起的中肋，形成三角形來支撐薄壁，以致青椒具有渾圓的外型。橋樑的骨架、屋頂下的橫樑等。

- (2) 為何腳踏車的車體其三角框架有的高而窄、有的卻短而寬，其中的奧妙在哪裡？（專注、理解監控、聯想、歸納推論）

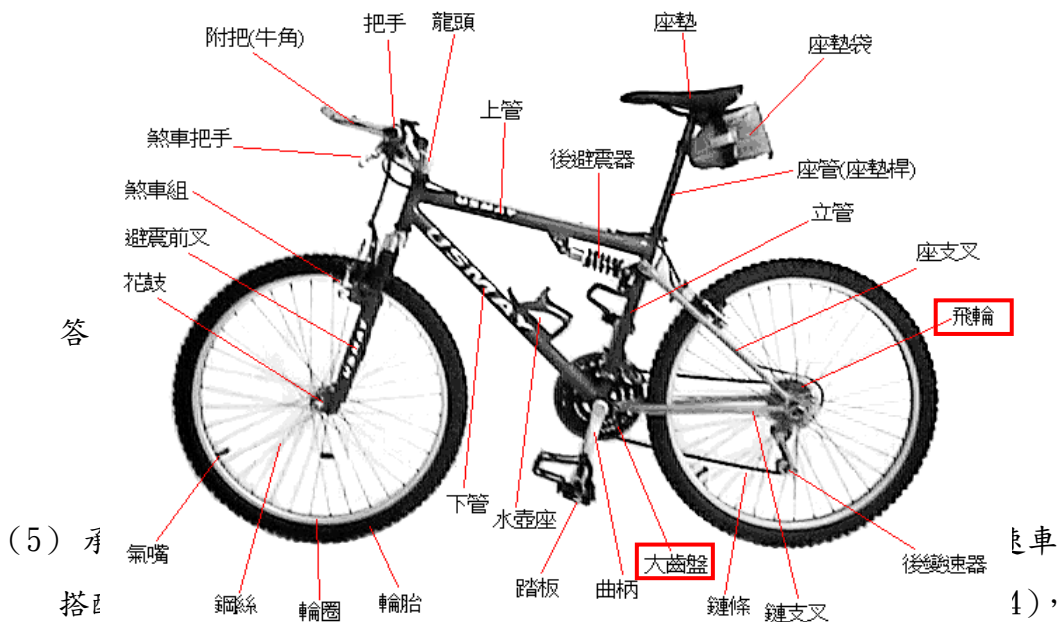
答：這是依據腳踏車的不同用途而設計的。一般越野腳踏車為了能爬坡、越溪，以及在顛簸的路面上行駛，必須降低框架，因此通常設計得短而寬。至於一般道路專用的腳踏車，考慮需要長時間騎乘，長希望能輕鬆地踩踏板，因此車體框架必須設計得高而窄。

(3) 下列哪一種車型最適合作為旋轉、扭轉或跳躍等特技使用？(理解監控)



答：②，因為它的三角形框架最貼近地面，最適合這些極限運動使用。

(4) 一般人購買腳踏車會問的第一個問題是，想知道該車為幾段變速？段數越高的車通常越貴，也更能適應不同的坡度及路況。而幾段變數指的是，大盤的片數與飛輪片的組合個數，參考下圖構造說明。例如有一種 MTB (Mountain Bike, 簡寫 MTB) 登山車前面有大盤 3 片，後飛輪則有 9 片，請問這樣的組合最高可達幾段變速？①9 段②12 段③27 段④39 段。(專注、理解監控、應用)



如下表（一）車輪比的數據所示。請問這樣的組合方式，實際上最多可能產生幾段的變速？①12段②20段③24段④27段。（專注、理解監控、歸納推論、分析綜合）

| 大盤 飛輪 | 44 | 32 | 22 |
|----------|------|------|------|
| 11 | 4.00 | 2.91 | 2.00 |
| 13 | 3.38 | 2.46 | 1.69 |
| 15 | 2.93 | 2.13 | 1.47 |
| 17 | 2.59 | 1.88 | 1.29 |
| 20 | 2.20 | 1.60 | 1.10 |
| 23 | 1.91 | 1.39 | 0.96 |
| 26 | 1.69 | 1.23 | 0.85 |
| 30 | 1.47 | 1.07 | 0.73 |
| 34 | 1.29 | 0.94 | 0.65 |

答：③，因為將相同的齒輪比以不同的顏色標示，推算一下，其實27段變速登山車頂多只有24段變速可以使用。如果將齒輪比很接近的也考慮進去，例如大盤22T與飛輪20T齒輪比是1.10和大盤32T與飛輪30T齒輪比是1.07，只有1.10與1.07的細微差別，把這樣都算下去的話，27段變速車，可能連20段變速都沒了。因此選②的學生，只要能說明合理都應該給予計分。

(6) 承上題，影響車子性能的主要憑藉是馬力和扭力，以該系統而言，當你（妳）要騎到最快時，踩踏的力量就要最大，亦即應該使用大馬力、低扭力以維持單車高速前進，因此你（妳）的最佳選擇是哪一種大盤-飛輪比？請說明理由。（理解監控、分析、歸納推論）

答：當大盤是44T，飛輪是11T的時。根據齒輪比的公式：齒輪比=44÷11=4，這個齒輪比等於4的意思所指的是，當你踩大盤轉1圈時，輪子會轉4圈。這時速度最快，但相對地騎乘時踩踏的力量也要最大。

(7) 反之，如果要騎上坡時，需要的則是大扭力，此時踩踏的力量都將轉成扭力以供爬坡之用，此時你（妳）的最佳選擇又該是哪一種大盤-飛輪比？請說明理由。（理解監控、分析、歸納推論）

答：此時需要最小齒輪比，以大盤最小齒片搭配飛輪最大齒，所以選擇大盤22T與飛輪34T的齒輪比。其齒輪比0.65，表示車手踩一圈時，輪子轉0.65圈，所以騎乘時踩踏的力量都轉成扭力來供爬坡了，但比較輕鬆不費力。

- (8) 承上第(6)題，該車輪子轉一圈前進的距離是固定的，假定其輪框直徑為26吋(1吋約2.54公分，故約66cm左右)，而圓周長=直徑 $\times 3.14$ ，請問當大盤踩一圈，該車將前進約_____公尺。(理解監控、應用、分析)

答：圓周長=直徑 $\times 3.14 = 66\text{cm} \times 3.14 \div 100 = 207\text{cm}$ ，輪子轉一圈單車前進2.07m，因為齒輪比為4，所以大盤踩一圈時，單車前進約8m。

- (9) 各種車輛的輪子形狀為何多數是圓形的？請說明理由。(理解監控、分析綜合、聯想)

答：圓有一個重要性質，就是圓周上任何一點到圓心的距離等長，這個相等的距離，叫做半徑。如果把車輪做成圓形，車軸安在圓心上，當車輪在地面滾動的時候，車軸離開地面的距離，總是會等於車輪的半徑長。因此安裝在車軸上的車廂，車廂裏坐的人，都將平穩地被車子載著走。另一方面，就物理學角度分析，當一樣東西在地上滾動的時候，要比在地面上拖著走省力多了，這是因為滾動摩擦阻力比滑動摩擦阻力小的緣故。

- (10) 〈打賭你沒聽過〉框框中史坦·瓦根數學教授所騎乘的腳踏車，其輪子是方形的，他在「倒懸拱形路」上行駛的意義為何？假定教授是在平坦的路面上騎乘，你(妳)認為會呈現怎樣的景況？請你(妳)畫圖加以說明。(理解監控、歸納推論、組織、整合、聯想、)

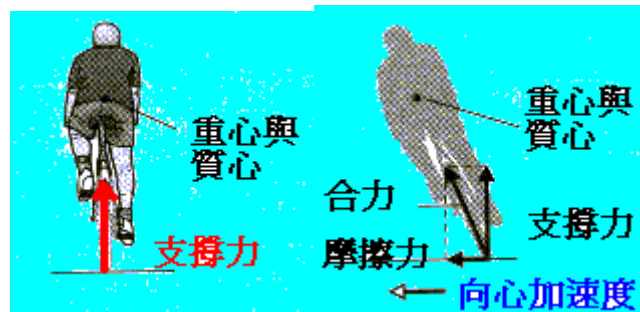
答：「倒懸拱形路」是為了搭配方形輪子而設計的，這樣可以讓輪心與路面任一點的切線維持等距離的關係，瓦根教授就可以平穩的騎乘腳踏車。假定這方形輪腳踏車，騎在平坦的路面上，因為從輪緣到輪心的距離並不相等，那麼這種車子走起來會高低顛簸震盪，也一定會把教授震得頭昏眼花，五臟六腑承受不了。

- (11) 猜想一下，為何腳踏車是兩輪的，而不做成三輪的？請寫下猜想的理由。(理解監控、分析綜合、歸納推論)

答：三個腳的桌子，在凹凸不平的地面上，只要重心不超出三個腳構成三角形的底面積，就會是處於平衡狀態。小孩子騎三輪腳踏車直線行進時很安穩，但是如果從斜坡上滑下(較快速)，且方向稍有偏轉時，就會很危險。這是由於物體本身的慣性，當車體轉彎時，慣性仍想依照原來的方向行進，此時若重心過高，車速過快或是轉彎太急，即使摩擦力足夠提供轉彎時所需的向心力，但是同時對質心所產生的力矩，會使的車體旋轉(翻倒)，是很危險的。腳踏車在靜止時，是完全不穩定的(需要另一隻腳來支



撐)。但是行進轉彎時，可以藉由人與車體的傾斜產生反方向的力矩來減少，由摩擦力所產生向外翻倒的力矩，自然就比較穩定。或是從輪子的接觸點來看，當身體與車體傾斜的方向，正好在摩擦力與正向力合力的同一方向時，則沒有任何力矩。如下圖：



但是三輪的車子則無法如此偏轉，因此在高速時反而變成不穩定。雖然雙輪腳踏車在靜止時並不穩定，但是在行進中的腳踏車，由於輪胎所具有的角動量，對於車體有一定的平衡作用。因此雙手不扶著車把，在一定速度以上，車子一樣可以維持前進不倒下。（參引書 1）

參考資料

趴趴牛趴趴照：<http://guan16.blogspot.com/>

柯拉·李、吉利安·奧瑞立著（俞璿譯）(2008). 《數學大騷動 — 在意想不到的地方發現數學》，臺北：究竟出版社。

黃福坤 (2008). 〈腳踏車的物理〉，刊

<http://www.phy.ntnu.edu.tw/demolab/everydayPhysics/bicycle.html>.

附件一：《數學大騷動》—腳踏車與數學 (pp.25-31)

◆同學們！你（妳）們知道台灣時下最夯的運動是什麼嗎？

◆看看底下這樣一部腳踏車，你（妳）想問第一個的問題是什麼？



山姆與教育局長雷克
生的辯論會首戰來到體育
館。

先

山姆說：「好，那麼我們就在這個體育館裡開始辯論吧！」「孩子，你確定嗎？這裡可沒什麼東西是跟數學有關的啊。」山姆很鎮定的望著雷克先生說：「在你面前就有了。」山姆向我們班上的超級運動員招了招手。是艾美莉。她為了參加下一屆的單車比賽，剛剛去受訓，現在才回到學校來。

「艾美莉，妳可以過來一下嗎？」

「山姆你好！雷克先生你好！」她一邊說著，一邊把她的腳踏車靠在牆壁上停好。

「山姆，你要我怎麼幫你呢？我不討厭數學。不過我做的事跟數學都沒什麼關係耶！」

「當然有關係！」山姆立刻說：「騎腳踏車正是一種與幾何學有關的運動。」就這樣，辯論會開始了。

「幾乎所有的腳踏車都包含三角形的框架結構，這是一種最結實牢固的結構，因為三角形的結構最不容易被騎乘者的體重壓垮。在碰撞、煞車，以及用力踩踏板時，也比較不容易出問題。同樣的道理，在橋梁、高樓、圓球形建築物上，也能發現三角形的結構。」

山姆接著說：「我本來不確定那些又酷又炫的專業級腳踏車是否也具有三角形結構。其實，三角形結構是車體的基本結構。只不過有時為了裝置避震器等零件，必須將三角形的框架彎曲，或略微削減。近年來，腳踏車車體運用了新的金屬材質，例如鉻和鈦，比別的金屬來得堅固，因此腳踏車的設計師可以開始嘗試新的造型。」

「等一下！」我忍不住打斷山姆的話，因為我想到我和他的腳踏車。「我腳踏車上的三角框架，比艾美莉那部車的扁平。而你的腳踏車，三角框架又比我和她的車更扁平，這其中有什麼奧妙嗎？」

「這是因為車子設計的用途不同。」山姆說：「你的腳踏車是越野車。越野腳踏車不是用來騎在一般道路上的，它必須能騎上陡峭的山坡，越過溪流，在岩石上顛簸而行，所以三角框架必須降低，以便適應山路的顛簸。越野腳踏車的

框架必須短而寬。」

山姆繼續解釋：「至於我的腳踏車是 BMX 單車—它是用來飛躍的！車子後方的三角結構必須盡可能扁平，讓我在落地時可以盡量貼近地面。這種腳踏車特別適合用來跳躍、旋轉，以及在充滿障礙物的極限運動場上行進。它也讓我很容易就能踩踏板加速。」



「至於我的腳踏車，」艾美莉說：「三角框架就不必太靠近地因為我騎車時不需要做出旋轉、扭轉或跳躍的特技。」

「沒錯！」山姆說：「一般道路專用的腳踏車，是為了長時間在的道路上騎乘，或是比賽之用，不必考慮路面顛簸的問題，重要的以輕鬆地踩踏板，因此車體的三角框架就必須設計得高而窄。」

「可惜我的車不適合爬坡。」我想到每天放學回家時都要騎一段路：「就算我一路使勁踩踏板，也無法一口氣爬完那個坡！」

我知道了！

腳踏車的踏板—齒輪—鍊條，三者之間的搭配是有玄機的！你有試過騎沒有變速裝置的腳踏車爬坡嗎？騎變速腳踏車時，你可以藉由踩踏板來帶動鍊條，鍊條套住一組前齒輪和後齒輪。你踩踏板時要使多少勁，取決於你選的齒輪組。

齒輪比高（前齒輪越大，後齒輪越小），每踩踏板一圈，輪子轉動的圈數比較多，前進的距離也比較長。這種齒輪組比較適合在平坦的路面騎乘。

至於騎上坡路時就不同了！此時重要的就不是前進的距離長短，你得趕快切換到低齒輪比（前齒輪越小，後齒輪越大）。這時每踩踏板一圈，前進的距離比較短。但是踏板踩起來比較不費力，就算是陡坡也覺得輕鬆！人們騎車時可能自以為是技術好，其實只有數學迷才知道，騎車輕鬆的祕訣在於齒輪比呀！

「那也跟幾何學有關哦。我指的是圓形，還有比例的問題。」山姆接著說：「所謂的比例，就是比較兩個數字。現在我們要比較的是，腳踏車前後兩顆齒輪的大小，這關係到你每踩踏板一圈，腳踏車的輪子會轉幾圈。」

「等一下，山姆，」艾美莉說：「齒輪不一定是圓形的哦！我曾經看過卵形，也就是橢圓形的齒輪。」

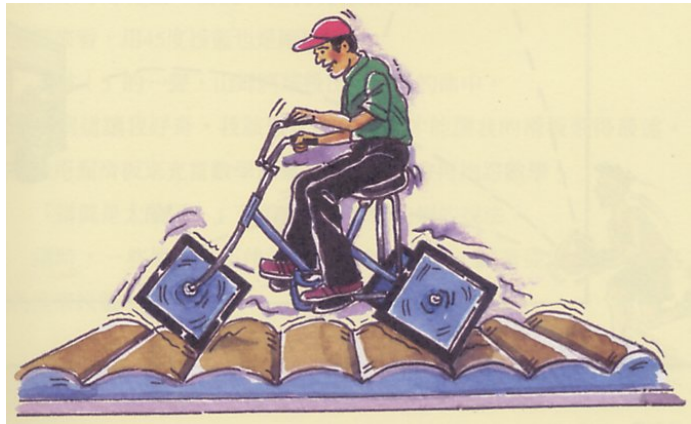
「沒錯，我爸爸的腳踏車，前齒輪是橢圓形，後齒輪是圓形。真希望我的腳踏車也有這種齒輪。有些單車騎士認為這種齒輪形狀可以提供更大的推動力，但是也有人不以為然。」山姆聳聳肩表示：「力量大不大無所謂，我就是喜歡那種形狀。」

我不是提過！所有的事物都會被山姆解讀成形狀和圖形嗎？腳踏車在他的眼中，是三角形和圓形或橢圓形的組合！

艾美莉聽得津津有味，她很有興趣了解事物運作的原理。這些有關騎車的小撇步我也很感興趣，不過讓我更高興的是不必去算那些數學。至於雷克先生，他顯然不覺得山姆說的有什麼了不起。

「腳踏車就是腳踏車，」他說：「爬坡登山很簡單呀，用力踩踏板就是了，哪裡需要懂得數字和形狀！」

山姆胸有成竹，他已經想好另一個例子。



打賭你沒聽過……

你有聽過方形輪子的腳踏車嗎？一無可取是吧，哈哈！

不過山姆告訴我，偏偏就有一位名叫史坦·瓦根的數學教授，還真的製造出一部方形輪子的腳踏車呢！為了配合這部腳踏車的輪子，他還得特別建造一段專用道路，路面是間隔相等且形狀相同的突起。瓦根教授把這種道路稱為「倒懸拱形路」。所謂的拱形，就是當你兩手各執繩子或鍊子的一端時，繩子或鍊子所形成的形狀。

想像一下，在這種由倒懸拱形所形成的路面，瓦根教授騎著那部輪子怪異的腳踏車前進，一定很有趣！

如果把車輪改成五邊形，當然也可以騎在這種倒懸拱形路上，只不過每一段拱形必須變得比較扁平、長度比較短。如果再換成六邊形車輪的話，拱形就必須更小、更扁平。事實上，當車輪的邊增加，拱形就變得越扁平、越小。想想看，如果讓車輪的邊不斷增加，到最後會變成什麼樣呢？

你猜到了嗎？就是一部圓形輪子的腳踏車，騎在平坦的路上！

〈腳踏車與數學〉閱讀測驗

年 班 號姓名：

◎ 閱讀完前文 pp. 1-5 的內容後，請完成底下的選擇與問答。

(1) 為何說腳踏車的車體以三角形為結構，最不容易被騎乘者的體重壓垮？請再列舉生活中類似原裡的設計案例兩個，並加以說明。

(2) 為何腳踏車的車體其三角框架有的高而窄、有的卻短而寬，其中的奧妙在哪裡？

(3) 下列哪一種車型最適合作為旋轉、扭轉或跳躍等特技使用？

①



②



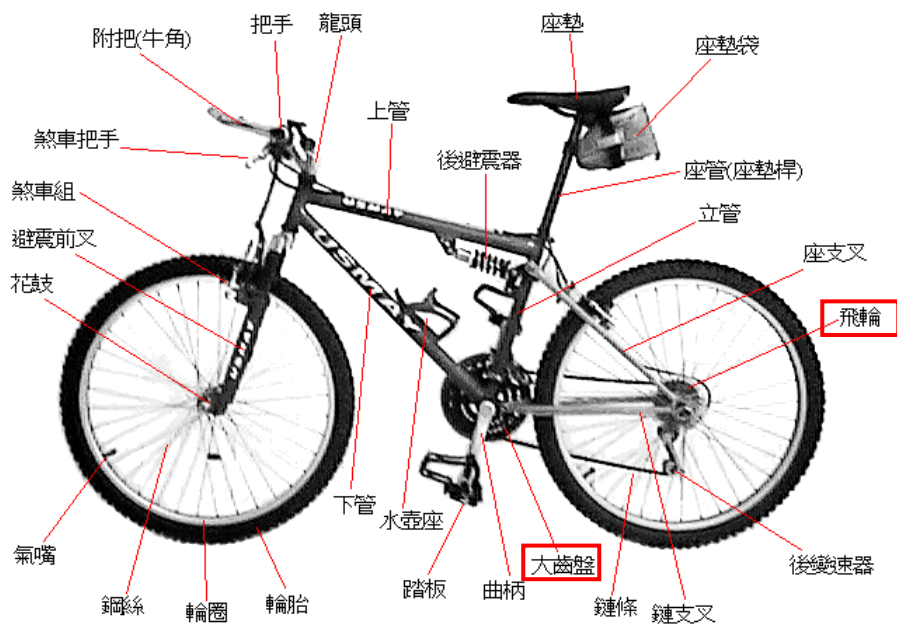
③



④



(4) 一般人購買腳踏車會問的第一個問題是，想知道該車為幾段變速？段數越高的車通常越貴，也更能適應不同的坡度及路況。而幾段變數指的是，大盤的片數與飛輪片的組合個數，參考下構造圖說明。例如有一種 MTB (Mountain Bike, 簡寫 MTB) 登山車前面有大盤 3 片，後飛輪則有 9 片，請問這樣的組合最高可達幾段變速？①9 段②12 段③27 段④39 段。



(5) 承上題，以熱門的 SHIMANO 08 年 XT 變速系統來說，其中 27 段變速車搭配的是大盤 44-32-22，飛輪是 11~34 (11 13 15 17 20 23 26 30 34)，如下表 (一) 車輪比的數據所示。請問這樣的組合方式，實際上最多可能產生幾段的變速？ ①12 段②20 段③24 段④27 段。

表 (一) 27 速登山車齒比變化表

| 大盤 飛輪 | 44 | 32 | 22 |
|----------|------|------|------|
| 11 | 4.00 | 2.91 | 2.00 |
| 13 | 3.38 | 2.46 | 1.69 |
| 15 | 2.93 | 2.13 | 1.47 |
| 17 | 2.59 | 1.88 | 1.29 |
| 20 | 2.20 | 1.60 | 1.10 |
| 23 | 1.91 | 1.39 | 0.96 |
| 26 | 1.69 | 1.23 | 0.85 |
| 30 | 1.47 | 1.07 | 0.73 |
| 34 | 1.29 | 0.94 | 0.65 |

(6) 承上題，影響車子性能的主要憑藉是馬力和扭力，以該系統而言，當你(妳)要騎到最快時，踩踏的力量就要最大，亦即應該使用大馬力、低扭力以維持單車高速前進，因此你(妳)的最佳選擇是哪一種大盤-飛輪

比？請說明理由。

(7) 反之，如果要騎上坡時，需要的則是大扭力，此時踩踏的力量都將轉成扭力以供爬坡之用，此時你(妳)的最佳選擇又該是哪一種大盤-飛輪比？請說明理由。

(8) 承上第(6)題，該車輪子轉一圈前進的距離是固定的，假定其輪框直徑為26吋(1吋約2.54公分，故約66cm左右)，而圓周長=直徑 \times 3.14，請問當大盤踩一圈，該車將前進約_____公尺。

(9) 各種車輛的輪子形狀為何多數是圓形的？請說明理由。

(10) 〈打賭你沒聽過〉框框中史坦•瓦根數學教授所騎乘的腳踏車，其輪子是方形的，他在「倒懸拱形路」上行駛的意義為何？假定教授是在平坦的路面上騎乘，你(妳)認為會呈現怎樣的景況？請你(妳)畫圖加以說明。

(11) 猜想一下，為何腳踏車是兩輪的，而不做成三輪的？請寫下猜想的理由。