

從 Mario Livio 的《黃金比例》談黃金比例在中學教學命題中的應用

輔導團：臺北市國中數學輔導團

臺北市麗山國中 張榮和

從古希臘時期歐幾里得發現「中末比」(extreme and mean ratio)，到中古歐洲帕西歐里稱之為「神的比例」(The ratio of God)，與達文西將其冠上「黃金分割」(Golden section)後，就一直籠罩著神祕的面紗，現在就讓我們來揭開！

何謂黃金比例

幾何擁有兩件至寶：

一件是畢達哥拉斯定理；另一件是把線段作中末比分割。

第一件足以和黃金媲美；第二件我們或可稱之為珍貴的寶珠。

克卜勒

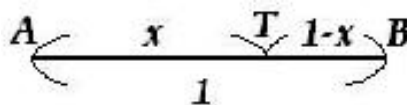
黃金比例跟真的黃金一點關係也沒有，只是以黃金來比喻它的珍貴。將 \overline{AB} 分成 \overline{AT} 、 \overline{BT} (令 $\overline{AT} > \overline{BT}$)，若 $\overline{AB} : \overline{AT} = \overline{AT} : \overline{BT}$ ，則稱此比值為黃金比例。或者是把一線段分成兩段，使其中較大的一段是原線段與較小線段的比例中項，就叫作“把這線段黃金分割”。

如圖，令 $\overline{AB} = 1$ 、 $\overline{AT} = x$

則 $\overline{BT} = 1 - x$ ，若滿足 $\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}$ ，則稱 T 點為 \overline{AB} 之黃金分割點

解得 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (負不合)

$= 0.618033989$ 取近似值 0.618
(or 0.62)



此比值（即 0.618）在外國稱為中外比、中末比、黃金比、黃金率、黃金數字，古代中國稱為”弦分割”。（註：Livio 一書中的黃金比例是大：小約為 1.618）

而”黃金分割”此美名，據說是歐洲文藝復興時期，由義大利藝術家達文西所冠上的。（註：Livio 一書中，認為「黃金分割」一詞起源自德國數學家歐姆，此人即發現歐姆定律的喬治·西蒙·歐姆(George Simon Ohm)的兄弟）

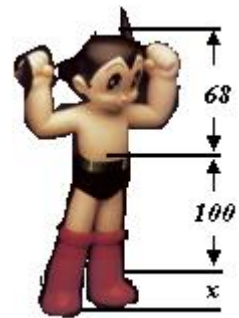
在專業的數學文獻中，以希臘字母 τ 來代表黃金比例， τ 字有「分割」的意思。可是到了 20 世紀，美國數學家巴爾(Mark Barr)，以 ϕ (phi) 代表黃金比例，取自希臘最偉大的雕刻家費底亞斯(Phidias, 490~430 B.C.) 名字中的第一個希臘字母。此人最為人津津樂道的不朽作品是(1)雅典帕特農神殿中的雅典娜女神像

(2)奧林匹亞神廟內的宙斯像。他在作品中一絲不苟地應用黃金比例。

從網路搜尋”黃金比例”出現最多的網站竟是和”林志玲”、”減肥”相關的主題，讓我們不得不再重新審視”黃金比例”對現代人的內涵與前人在藝術上的意義作一比較。

其實身材像志玲姐姐一般成黃金比例的，對東方人來說很少人符合。它是西方人的比例透過大眾傳播的力量強加在女性身上的緊箍咒，害得很多女性同胞為達此目標而”自虐”，何必呢？何況身材百分之八十五是由遺傳控制的，以下是一則為修正外觀達到黃金比例的例子，請各位同學作作看：

定義上半身是肚臍到頭頂的長度，下半身是肚臍到腳底（鞋底）的長度。當上半身：下半身之比值為 0.62 時，稱為”黃金身材”。今阿和身高 168 cm，下半身 100 cm，則應穿 _____ 公分的高跟鞋，才能讓外觀看起來是”黃金身材”。（四捨五入，取到整數位）



sol：令鞋高為 x 公分

$$\text{則 } \frac{168 - 100}{100 + x} = 0.62$$

$$68 = 62 + 0.62x$$

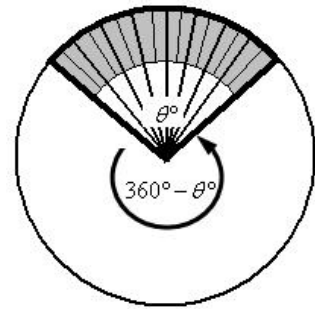
$$\text{得 } x \doteq 9.6 \doteq 10$$

Ans：10 cm

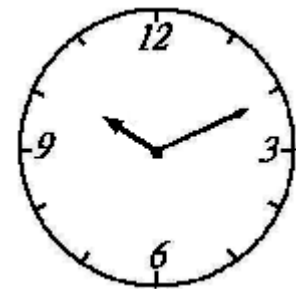
黃金比例既然這麼神！那麼很多事物便想與它沾上邊，以提高身價，互捧的結果是讓 0.618 更被神格化。舉例說明扇子的張角應是多少度？才會看起來最”美”。

扇子張開的角度 θ° 與 $360^\circ - \theta^\circ$ 的比值為 0.62 時，看起來最順眼，請算出 $\theta^\circ =$ _____ 度（四捨五入，取到整數位）

$$\begin{aligned} \text{sol : } \frac{\theta}{360 - \theta} &= 0.62 \\ \theta &= 223.2 - 0.62\theta \\ 1.62\theta &= 223.2 \\ \theta &= 137.7 \\ \text{取 } \theta &= 138 \\ \text{Ans : } \theta &= 138 \end{aligned}$$



鐘錶行展示鐘錶依傳統將時間調在十點十分，有人說這樣看起來比較像黃金比，有人說像勝利”V”或”微笑”也有人說十全十美。不管怎樣，請算出兩針夾角多少度



Ans : 115°

不像 π 那麼麻煩，人類為了求 π ，還花了一番功夫，黃金比例是一個無理數，只用到 $\sqrt{5}$ 。古希臘對數字是有些迷信的，5 代表第一個雌性數字（即偶數）2，與第一個雄性數字（即奇數）3 的結合，因此 5 變成了表示愛情與婚姻的數字。順便一提 6 是第一個完美數（perfect number），也是創世之數。因 6 的所有正因數和（不含本身） $1+2+3=6$ ，而上帝在六日內創造這個世界。

黃金矩形

黃金中項真無理，它不是你那普普通通的無理數。

如果你把它倒過來(這真有趣！)

你會得到他本身，減一。

可是如果把她加一，

就得到了它的平方，請相信我。

這是布魯克曼(Paul S. Bruckman)在一九七七年於《費波納奇季刊》發表了一首打油詩〈一成不變的中項〉(黃金比例有時也稱為黃金中項)：

若矩形切掉一正方形，剩下的矩形與原矩形相似，則稱此矩形為黃金矩形。現在讓我們來算一下黃金矩形的寬：長的比值。

矩形長 l 為，寬為 w ，令 $(l > w)$

依黃金矩形規定 $\frac{w}{l} = \frac{l-w}{w}$

$$\frac{w}{l} = \frac{l}{w} - \frac{w}{w}$$

$$\text{令 } \frac{w}{l} = t, t = \frac{1}{t} - 1$$

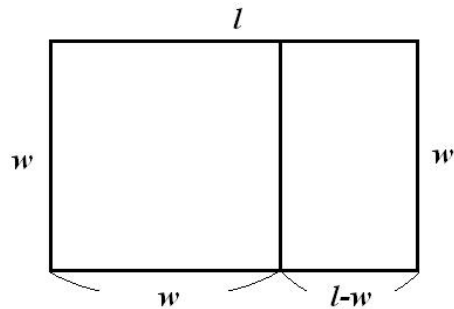
$$t^2 = 1 - t$$

$$\therefore t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (\text{負不合}) \approx 0.618$$

(If $l=1$ 則 $w \approx 0.618$)

由上式可看出 $\frac{l}{w}$ 的比值等於 $\frac{w}{l}$ 的比值加 1

即 $0.618+1=1.618$ ，許多書稱 1.618 為黃金比例



提到黃金矩形就一定會提到雅典的巴特農神殿(如上圖)。此建築於 1687 年威尼斯軍隊攻打鄂圖曼土耳其時，被炮火直接命中，造成嚴重損壞，不過其基本建築仍倖存無恙。

一九九二年，緬因州立大學的數學家馬考斯基在《〈大學數學期刊〉》(The College Mathematics Journal)上發表了一篇標題為(關於黃金比例的錯誤觀念)的文章，他嚴肅地質問道，黃金比例是否真的出現於帕特農神殿中？馬考斯基首先指出，部分的帕特農神殿確實不符合黃金矩形，但是所有熱衷於黃金比例的人卻對此一概忽略。更重要得是，不同作者所給的尺寸都不一樣，可能是測量時所用的參考點不同所致。

因此，帕特農神殿的設計是否用到黃金比例？我們很難給出一個肯定的答案。雖然大多數關於黃金比例(或者中末比)的數學定理似乎都在帕特農神殿之後才公式化，但在此之前，畢氏學派的門徒就已經知道了許多關於這方面的知識。因此，帕特農神殿的建築師可能基於當時流行的美學正統觀念來設計。可是，這比許多書籍想要說服我們相信的事情更不確定，而且帕特農神殿的實際尺寸也沒有特別支持這樣的說法。

上帝的眼睛

將黃金矩形，依序切掉一正方形，則會收斂到一個永遠到不了的點——上帝的眼睛。(這是數學家皮考佛(A. Pickover)建議的)

黃金矩形的窗戶在理論上應該最受普羅大眾所喜愛，但德國有位教授，畫出不同比例的窗戶，讓大學生票選最喜歡的形狀，結果較細長型的窗戶排第一名，黃金矩形名列亞軍！可能受現代藝術的影響，年輕人較愛”有型”的事物！

歐洲文藝復興時間，許多偉大的雕塑品，也都依黃金比例創作，如大衛雕像，智慧女神雅典娜，太陽神阿波羅，這些雕像外觀幾乎處處依照黃金比。

摩天大樓在黃金分割點加條腰帶，會使整個大樓看起來更顯出雅緻中帶點活潑，獨唱歌手站在舞台的黃金分割點給人感覺最適宜，音響效果也是最好(其實站在共鳴點更好)，拍照片時，依黃金比佈局，聽說最容易得獎？？

黃金三角形

頂角為 36° 的等腰三角形，其兩底角可算出均 72° ，請算出底邊與腰長之比值，會不會又是黃金比？

等腰 $\triangle ABC$ ，頂角 $\angle A = 36^\circ$ ，令 $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$ ，求 $\overline{BC} =$ _____。

sol：作 $\angle B$ 平分線 \overline{BD} 交 \overline{AC} 於 D 點

則 $\triangle BCD \sim \triangle ABC$ (AA)

且 $\triangle ABD$ 為等腰三角形

令 $\overline{BD} = x$ ，則 \overline{BC} ， \overline{AD} 均為 x ， $\overline{CD} = 1 - x$

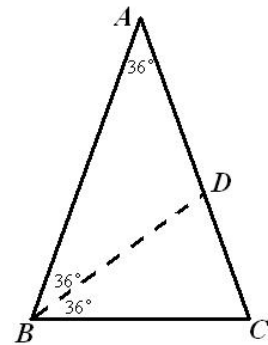
依相似形對應邊成比例

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{CD}$$

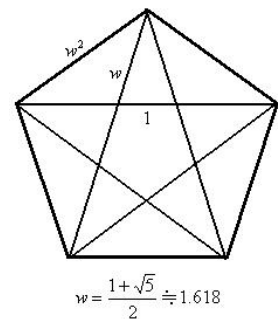
$$1 : x = x : (1 - x)$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$\text{由公式解 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ (負不合)}$$



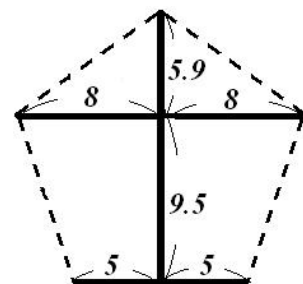
其實正五邊形對角線所形成的五角星中，處處存在著
”黃金比 $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ”。



PS：此五角星形是畢氏學派的象徵徽章，代表”健康”

同學你會利用尺規作圖，作一正五邊形嗎？

先說古代中國是如何作”很像正五邊形的五邊形”
口訣是「九五頂五九，八五分兩邊」，方法是先寫一個士大夫的”士”，比例如右圖所示，再依序連成”正五邊形”。



很遺憾的它不是一個真正的正五邊形（但已經非常接近），下面我們會教你如何利用黃金三角形的特性來尺規作圖，畫出正五邊形。

〔訣〕利用正五邊形對角線：邊長 的比值 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ，若邊長為 $\overline{AB}=1$ ，以尺規作

圖作 $\overline{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 便可。

〔已知〕 $\overline{AB}=1$

〔求作〕：求作正五邊形 $ABCDE$

作法：

取 \overline{AB} 中點 O

過 B 作直線 $L \perp \overline{AB}$ ，在 L 上取 $\overline{BP}=1$

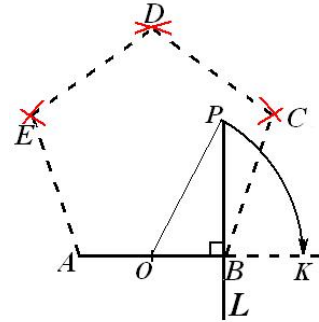
以 O 為圓心， \overline{OP} 為半徑，畫一弧交 \overline{AB} 延長線於 K

分別以 $A、B$ 為圓心， \overline{AK} 為半徑，各畫一弧交於 D

分別以 $A、B、D$ 為圓心， \overline{AB} 為半徑，各畫一弧交於 $C、E$

連 $\overline{BC}、\overline{CD}、\overline{DE}、\overline{EA}$

五邊形 $ABCDE$ 即為所求



PS：有人稱 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1.618$ 為黃金比，也有人稱 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \doteq 0.618$ 為黃金比，但

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{(-1+\sqrt{5})}{2} = 1$ 兩數為倒數關係，也就是 $1.618 \times 0.618 \doteq 1$

如右圖的正五角星中，能找到幾個三角形？

Sol：將各部分編號

一個號碼的三角形有：10 個

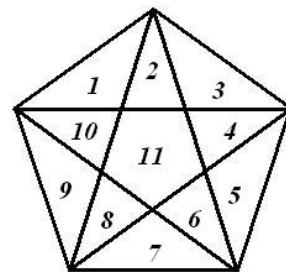
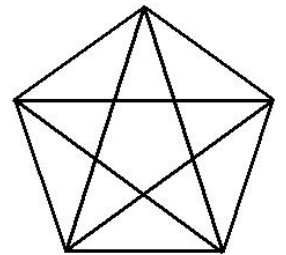
兩個號碼的三角形有：10 個

三個號碼的三角形有：10 個

四個號碼的三角形有：0 個

五個號碼的三角形有：5 個

$10+10+10+0+5=35$ 共有 35 個



要求平面上相異四點，形成梯形且任意兩點間的距離只能有兩種。

(1)請大略地畫出圖形。

(2)求這兩種距離的比值(小：大)= _____ 。

Sol :

(1)劃一等腰梯形 $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{CD}$

且 $\overline{AC} = \overline{BD} = \overline{BC}$

(2)令 $\angle ABD = x^\circ$ ，則可推得 $\angle ADB = x^\circ$ ($\because \triangle ABD$ 是等腰三角形)

$$\angle DBC = x^\circ (\because \overline{AD} \parallel \overline{BC})$$

$$\therefore \angle C = 2x^\circ$$

$$\text{得 } x + 2x + 2x = 180$$

$$x = 36$$

由上例(即黃金三角形)知 $\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ 約等於 0.618

講了這麼多黃金比的”神話傳奇”，好像是美理事物的魔術數字。如人體體溫 37° ，乘以 0.618 約為 23° 是醫界認定人體感覺最舒適的溫度。但每個人體質不同，誰能保證一定會適合你？又如紙張、國旗寬與長的比值也很難找到相吻合的，再說如果美術、藝術創作都要黃金比化，那不就等於制式化了，這有獨特性、多樣性可言嗎？

總之審美觀是很個人化、時代化的，擁有自己的看法並能說出喜好的理由，比起凡事神格化來的重要。