北區國中「數學科普讀物之閱讀與應用」工作坊－作品 14

神奇的費波納奇數列

輔導團：臺北市國中數學輔導團
臺北市麗山國中　張榮和

費波納奇的每一任老婆
無事只愛吃比薩
每一任老婆的體重都是前兩任加起來
第五任老婆就非常有份量了

中世紀歐洲最偉大的數學家是李奧納多（約 1170-1240)，他較為人知的稱呼是費波納奇，意思是「波納奇之子」。

他在義大利的比薩出生，但父親因在阿爾及利亞工作，年輕的李奧納多便在當地的穆斯林老師那兒，接受早期的數學訓練。他很快發現，阿拉伯十進位制系統的數位概念和零的符號非常優越。相較之下，他的國家義大利還在使用的羅馬數字系統就笨拙多了。

他最有名的著作「計算書」(Liber Abaci)(註：Livio 一書中譯本，譯為”算盤之書”較不恰當)，就極力推崇阿拉伯計算法的優點。

費波納奇數列名氣這麼響亮，最該感謝的是 19 世紀法國數學家盧卡斯(Lucas，1842~1891)，將「計算書」第 12 章第 7 節中的一個微不足道的問題，以「費波納奇」命名。題目如下：我們把一對成熟兔子放在一起讓他們繁殖後代，假設每胎只生一公一母兩隻小兔子，而小兔子經一個月長大後，才有繁殖能力。請問你，一年後共有多少對兔子？(假設兔子都沒有死掉 且長大後每一個月生一胎)一開始只有 1 對；一個月後出生一對後變 2 對；3 個月後第一對又生一胎就變成 3 對；4 個月後就變成 5 對。寫成一數列便是 1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，377，由此可推得一年後共有 377 對兔子，真嚇人！

其實李奧納多對此數列並無特別著墨，一直到 Lucas 加上註解，並深入的探討後 相關的研究論文便如費波納奇的兔子一般快速繁殖。

還記得熱門的電影〈達文西密碼〉片中拱心石所隱藏的密碼為 1123581323 嗎？為何大多數人看完電影問他密碼是多少？很少人記得起來。但有些人一看就記住，而且隨時再問他也沒問題。其實不難，我們立即為你解密！

針對前兩項為任意正整數開始，且第 3 項以後均是前兩項之和的數列，現在稱其為「廣義的費氏數列」(generalized Fibonacci sequences)。Lucas 把其中最簡單的 1，1， 2，3，5，8，13，…稱為費波納奇數列，簡稱為費氏數列或裴氏數列。

長久以來，費氏數列因為「簡單而深刻」，很多人對它的興趣歷久彌新。部分的原因是它偶而會在我們意料不到的地方出現。

首先，我們先解釋為何費氏數列會與黃金比例發生關聯？

1　，1，2，3，5，8，13，21，34，55，……

F_1，F_2，F_3，F_4，…………

(1)前兩項規定為1，1

(2)$F_{n+2}= F_{n+1}+ F_n$

$\frac{1}{1}$=1.000000

$\frac{1}{2}$=0.500000

$\frac{2}{3}$=0.666666

$\frac{3}{5}$=0.600000

$\frac{5}{8}$=0.625000

$\frac{8}{13}$=0.615384

$\frac{13}{21}$=0.619047

$\frac{21}{34}$=0.617647

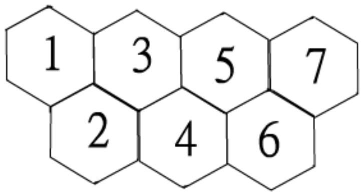
$\frac{34}{55}$=0.618181

我們發現 F_n：F_{n+1}的比值會趨近於黃金比例 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

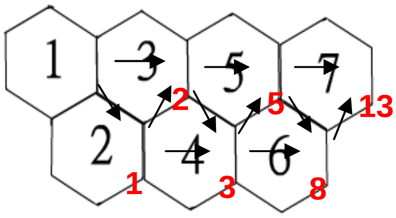
現在就讓我們來體驗費氏數列在中學數學命題內的驚奇之旅吧！

驚奇一：

Ex 1: 想要從單元 1 走到單元 7，如果規定只能從編號小的單元向相鄰邊號較大的單元移動，那麼有多少條不同的路線？



Sol：

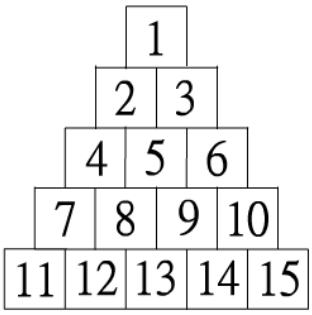


1, 1, 2, 3, 5, 8, 13…

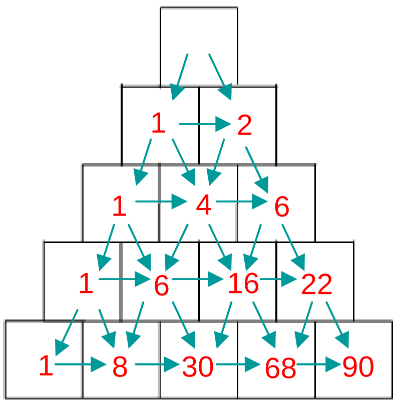
A: 13

利用這種「累加」的觀念來解決下列問題。

Ex 2：如圖示，有 15 個編好號碼的房間，你可以從小號碼走到相鄰的大號碼房間，但不能從大號碼走到小號碼房間，從 1 號房間走到 15 號房間，共有多少種不同的走法？



Sol：

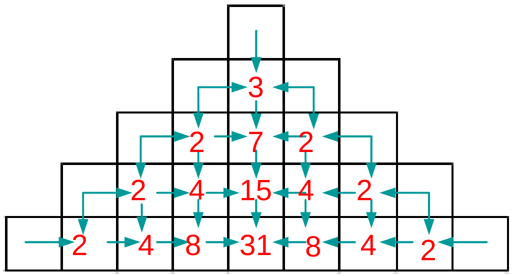


A: 90

Ex 3：尋找「HAPPY」的方法共有多少種(自「H」開始，走到「Y」結束，只允許水平或垂直方向移動)

H
H A H
H A P A H
H A P P P A H
H A P P Y P P A H

Sol：



A: 31

Ex 4：如下圖，從第 3 個數開始，每一個數都是前兩數的和，請將空格填滿。

$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	7	$\square$	$\square$	30

Sol：

$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	7	$\boxed{X}$	$\boxed{X+7}$	30

列式 $$x+x+7=30$$
$$\therefore x=11.5$$

$\boxed{0.5}$	$\boxed{2}$	$\boxed{2.5}$	$\boxed{4.5}$	7	$\boxed{11.5}$	$\boxed{18.5}$	30

驚奇 2：什麼！連走樓梯也和費氏數列有關係！

Ex 5：台北市立麗山國民中學總務處前有一座樓梯通往二樓，樓梯為二段迴轉式，第一段有 11 個階梯，第二段也有 11 個階梯，如果上樓時每一步可走一階或二階，而且在轉折處必須停留後再往上走，則從一樓走到二樓共有______種不同的走法。

Sol：

走到第一階的方法	1 種
走到第二階的方法	2 種
走到第三階的方法	3 種
走到第四階的方法	5 種

.

.

.

走到第十一階的方法　　　　144 種

1　2　3　5　8　13　21　34　55　89　144

所以一樓到二樓共有 $144 \times 144 = 20736$ 種走法

Ex 6： 同 EX5，但改成每步可走 1 階，2 階或 3 階，則共有幾種走法？

Sol：

走到第一階的方法　　　　1 種

走到第二階的方法　　　　2 種

走到第三階的方法　　　　4 種

走到第四階的方法　　　　7 種

走到第五階的方法　　　　13 種

.

.

.

走到第十一階的方法　　　　504 種

1　2　4　7　13　24　44　81　149　274　504

即第四項開始，均是前三項之和

所以一樓到二樓共有 $504 \times 504 = 254016$ 種走法

驚奇 3：在中學命題中與費氏數列相關的題目也不少！

Ex 7：費氏數列 1 ， 1 ， 2 ， 3 ， 5 ， 8 ， 13 ，…, 求第 2005 項除以 6 之餘數?

Sol：

a_{13}

$\boxed{1 \quad 1}$　2　3　5　2　1　3　4　1　5　0　$\boxed{5}$

5　4　3　1　4　5　3　2　5　1　0　$\boxed{1 \quad 1}$

發現24個循環一次

$2005 \div 24 = 83 \ldots 13$ ⟶ 找第13個 ：5

KEY：只記除以 6 的餘數，觀察其循環的規律

Ex 8：觀察規則 1 ， 2 ， 3 ， 6 ， 12 ， 23 ， 44 ， X ， 164

求 X=______

Sol：

1　2　3　$\boxed{6}$　$\boxed{12\quad 23\quad 44}$　$\boxed{X}$

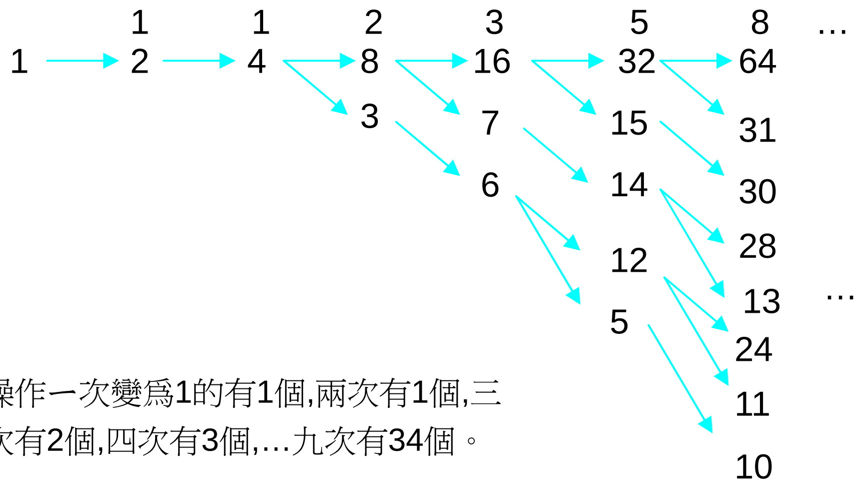
第五項開始，每一項皆爲前4項之和

X=6+12+23+44　　或　　X=164-12-23-44

=85　　　　　　　　　=85

Ex9：對一個自然數如下操作，如果是偶數則除以 2，如果是奇數則加 1，如此進行直到為 1 時操作停止，問：經 9 次操作變為 1 的自然數有多少個?

Sol：



操作一次變爲1的有1個，兩次有1個，三次有2個，四次有3個，…九次有34個。

Ans：34 個

驚奇 4：費氏數列在生物界給人的驚艷還不斷被發現中，連蜂界雄蜂與雌蜂的數目比約等於 0.618

Ex 10：生物學家說：「雄蜂是從未受精的卵孵出，所以他有母親而無父親；雌蜂是從受精的卵孵出，所以他有父母雙親。」(父母親為第一代祖先，祖父母親為第二代祖先，以此類推)請問一隻雄蜂的第二、三、四、五、十代祖先各有多少隻?

Ex 11：

聽說人類的兒童乳牙數目，與成年人的恒牙數目之比也是黃金比，讓我們來算一下！

已知成年人恒牙數為 32 顆（含智齒），而兒童的乳牙數目：成年人的恒牙數 = 0.618，求乳牙共 ＿＿＿＿＿＿ 顆

sol：設乳牙共 x 顆

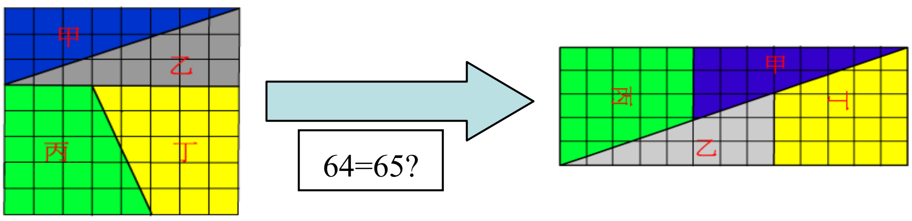
$$\frac{x}{32}=0.618 \quad \therefore x=32\times 0.618$$

$$=19.776$$

$$\fallingdotseq 20$$

驚奇 5：魔術也和費氏數列沾上邊，真奇妙！

Ex 12：試觀察下方左右兩個圖形，並選出適當選項。



（A）矩形 PQRS 中，QS 附近有重疊面積=1 平方單位

（B）矩形 PQRS 中，QS 附近有空隙面積=1 平方單位

（C）任意邊長為整數正方形，均可如上圖方式切割後拼成面積相差 1 平方單位的矩形

（D）以上均非

Sol：

費氏數列 $1,1,2,\underbrace{\overset{a_4}{3},\overset{a_5}{5},\overset{a_6}{8}},\overset{a_7}{13},21\ldots$

$$\Rightarrow\begin{cases}{a_6}^2-a_5\times a_4=-1\\{a_5}^2-a_4\times a_6=1\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}8^2-5\times 13=-1\\5^2-3\times 8=1\end{cases}$$

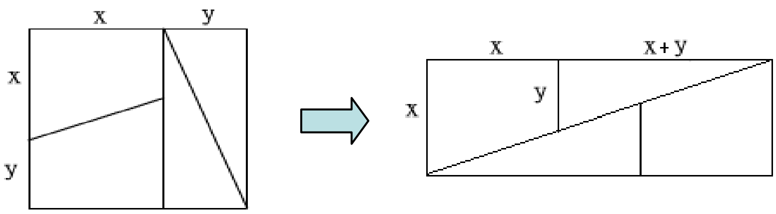
費氏數列具備有以下規律：

（1）n 為奇數，則 ${a_n}^2-a_{n-1}\times a_{n+1}=1$

（2）n 為偶數，則 $a_{n-1}\times a_{n+1}-{a_n}^2=1$

1 單位對整個面積所佔比例太小，肉眼不易察覺。常見於吉普塞人的街頭魔術中。

上題經切割重拼後，竟然會產生 1 單位的誤差，那到底要如何切才能變成「無縫切拼」呢？如何造出一個正方形, 使其經過如前之切割後, 再拼成的長方形沒有空隙?



<a> $(x+y)^2 = x\times(2x+y)$

<b> $\dfrac{y}{x} = \dfrac{x+y}{2x+y}$

令 $\dfrac{y}{x} = t$,可簡化成 $t^2 + t - 1 = 0$ $\quad \therefore t = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$(負不合)

$\fallingdotseq 0.618$