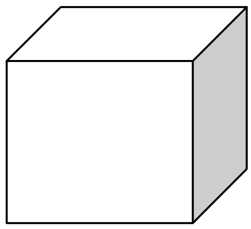
北區國中「數學科普讀物之閱讀與應用」工作坊－作品 13

從 91 基測題目談到艾迪胥的猜想

輔導團：臺北縣國中數學輔導團
臺北縣光榮國中　吳孟佳

24. 小方拿了一張長 80 公分，寬 50 公分的紙張，剛好剪出 n 個正方形(其面積大小可以不相同)。請問 n 的最小值是多少？
(A) 3
(B) 5
(C) 10
(D) 40

當年，這個題目挑戰了許多學生套用最大公因數的習慣，而且它正是艾迪胥關於正方形切割猜想的一個起點呢！！如果將這題目中的紙張改成正方形，括號中的「可以」改成「必定」，那問題可遠遠超出國中畢業生的能力範圍。但是，它所引伸出來的連鎖反應之大，確實很有趣。艾迪胥（Paul Erdos）猜測：這種切割法不可能存在，如果要將一個正方形切割成有限的小正方形，則至少會有兩個大小相同的正方形。

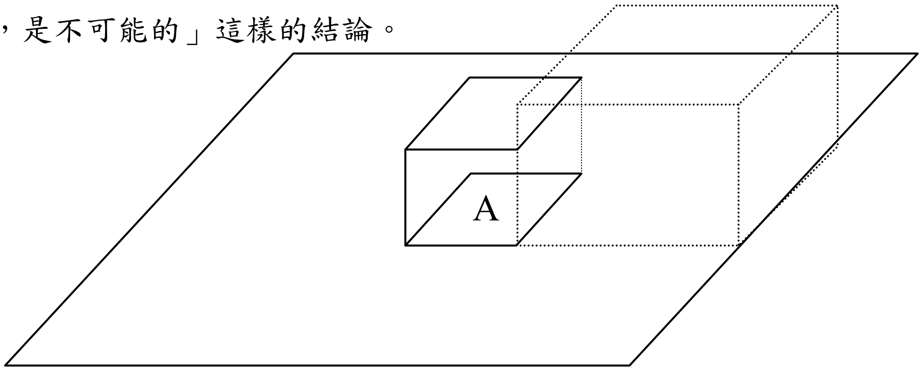


二維空間中，要把正方形切割成更小的正方形很簡單（例如棋盤上的格子）。但如果切割後的正方形大小不能相同呢？為什麼艾迪胥會這樣猜測(這種切割法不可能存在，如果要將一個正方形切割成有限的小正方形，則至少會有兩個大小相同的正方形）？雖然數學的證明立基於純粹的邏輯，但是，觀察類似情境，往往可以提供猜想連結的溫床！所以，我們不妨先來想一想：

三維空間中，要把正立方體切割成有限的小正方體，但是大小不能相同，辦得到嗎？

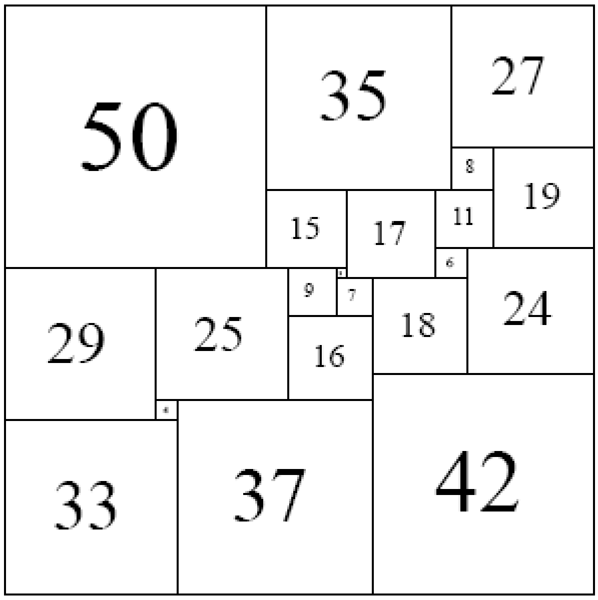
來看一下這一段證明吧！！

我們要使用一種證明方法 — 先假設「立體方塊可以被切割為大小不同的有限小方塊」也許等一下我們可以發現產生矛盾，再回過頭來得到「將立體方塊切割成有限的不等方塊，是不可能的」這樣的結論。



1. 立方塊的底面被切割為大小不同的方形，他們都是小方塊們的底部。
2. 注意底部**最小**的一個方形 A（如圖）。
3. A 不可能位在角落。
4. A 不可能位在邊界上任一處。
5. A 必定位在靠近中央的地方，周圍圍滿了較大方形（大方塊們的底部）
6. A 所在方塊的頂端就好比迴廊環繞的中庭，全被更大的鄰居所圍繞。
7. A 所在方塊的頂部必須被更小的方塊所覆蓋。
8. 這個論證會一再重複：最小的方塊必須被更小的方塊覆蓋，如此持續下去永無止境了，‘於是這就推翻當初我們的假設「立體方塊可以被切割為大小不同的有限小方塊」。

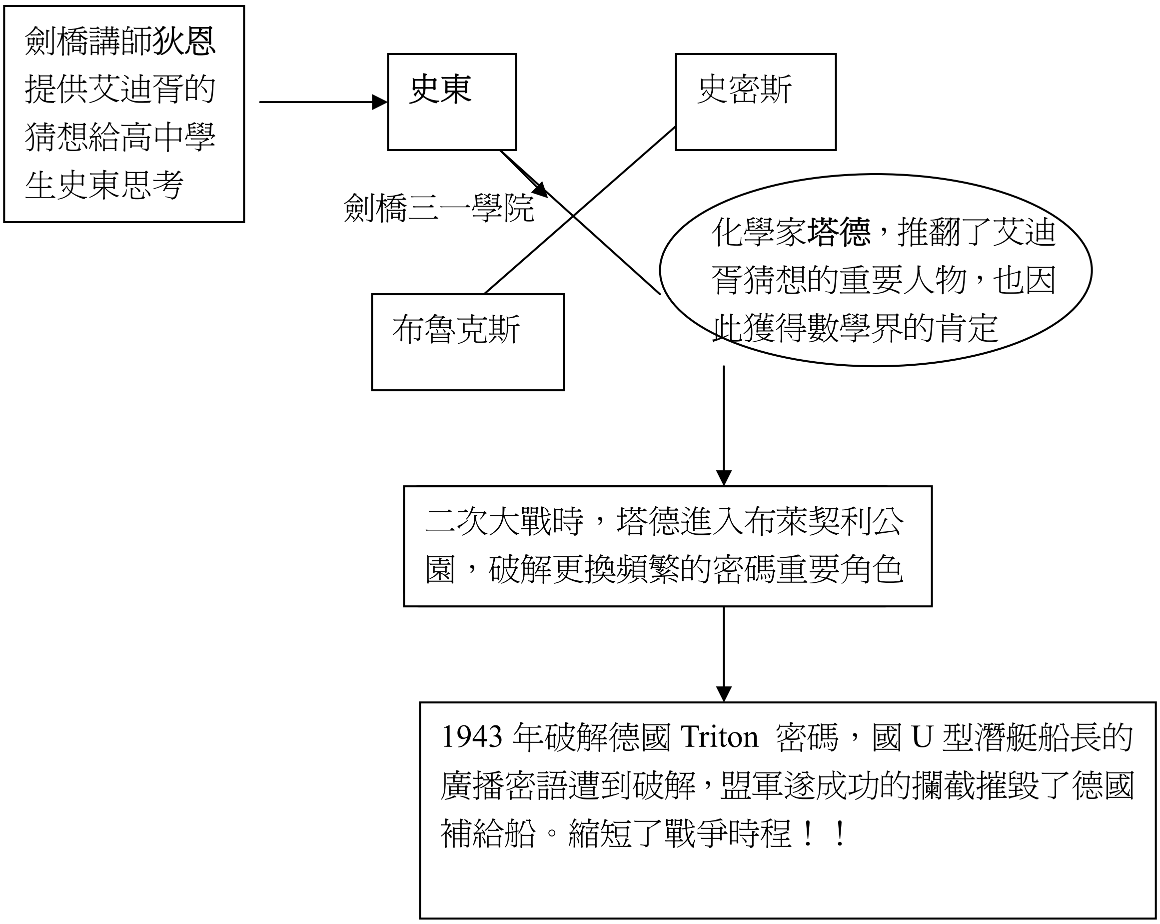
事實上就在 1978 年,杜吉裴斯汀發現了正方形切割為不等正方形的最小數目為 21，切割法如下：



21 : 112A AJD 1978

資料來源：Squaring.net

或許就是三維空間中這樣的觀察，讓艾迪胥提出這個在平面上正方形的猜想吧！雖然這個猜想後來被證明是錯的，但是有趣的是，人們投入去推翻這樣錯誤的猜想，竟也可以引發一連串影響，來看看這一系列的連鎖反應，在這邊列了一個簡單的流程圖僅供大家參考一下：



看來，就連推翻艾迪胥的錯誤猜想都啟發了一顆心靈，改變了一個生命，甚至，拯救了西方文明。

只要檢視一些謹慎挑選的樹木，便可了解整座森林。

你如何看待那些經過觀察後，在心裡浮上來的猜想呢？

艾迪胥擁有不可思議的技巧，能夠挑選出透露整體結構的問題；他挑選的問題總是相互關聯，儘管它們和現存問題的關聯性，通常得花上好幾年才會為人所知。他為不同難度的問題提供了不同額度的獎金，所以，我們不只知道了問題，也知道了他對問題的評價。幾乎所有數學家都能提出極度棘手、平凡簡單，或無厘頭式的問題；任何人可能會徒勞無功的陷溺其中，忽略了核心，而艾迪胥卻善於找出難易適中、引發思考、開啟新界、產生定理的問題。他選擇敞開大腦的研究模式，將猜想留給世人，成就了自己的不朽。