

音樂與數學的交集

輔導團：臺北縣國中數學輔導團

臺北縣二重國中 李美姿








臺北縣崇林國中 黃麗紅

音符是代表樂音的符號，它有兩種作用：一是本身的形象表示音的長短，另一是譜表上的位置表示音的高低。

壹、音符



















通用的音符有七種，將這七種音符依次排列起來，每一種音符的長度都是前者的一半，如下表（一）：

表（一）音符的長度

音符							
名稱	全音符	二分音符	四分音符	八分音符	十六分音符	三十二分音符	六十四分音符



音符本身所能表示的長度，只是半數或倍數的。為使音的長度更能巧妙靈活地表現，還會採用附點、複附點等符號，如下表（二）與表（三）。

表（二）音符附點說明

 =  + 	 =  + 
 =  + 	 =  + 
 =  + 	 =  + 

表（三）音符複附點說明

 =  +  + 	 =  +  + 
---	---

音樂在演奏時有強弱的週期性，因為強弱的週期再現，於是把樂曲中音符分成許多等長的部份，稱為小節。樂曲中的拍子，用拍子記號（簡稱拍號）來表示。這種記號是用上下兩個重疊的數字，一般記在譜表開始的地方。上方數字，表示每小節內的拍數；下方數字，表示當做一拍的音符（1 代表全音符，2 代表二分音符，4 代表四分音符，8 代表八分音符，16 代表十六分音符，32 代表三十二分音符，64 代表六十四分音符）。例：

- 二拍子： $\frac{2}{2}$ 每小節有二拍，以一個二分音符當一拍
 $\frac{2}{4}$ 每小節有二拍，以一個四分音符當一拍
 $\frac{2}{8}$ 每小節有二拍，以一個八分音符當一拍
- 三拍子： $\frac{3}{2}$ 每小節有三拍，以一個二分音符當一拍
 $\frac{3}{4}$ 每小節有三拍，以一個四分音符當一拍
 $\frac{3}{8}$ 每小節有三拍，以一個八分音符當一拍
- 四拍子： $\frac{4}{2}$ 每小節有四拍，以一個二分音符當一拍
 $\frac{4}{4}$ 每小節有四拍，以一個四分音符當一拍
 $\frac{4}{8}$ 每小節有四拍，以一個八分音符當一拍

貳、音階的產生

我們常見的音階由 7 個基本的音組成：1，2，3，4，5，6，7，或用唱名表示即 Do, Re, Mi, Fa, So, La, Si。

7 個音階由低到高排列，而音階高低則是由物體振動的快慢（即頻率）所決定。18 世紀初英國數學家泰勒（Brook Taylor, 1685-1731）獲得弦振動頻率 f 的計算公式：

$$f = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

其中 l 表示弦的長度、 T 表示弦的張緊程度、 ρ 表示弦的密度。

這表明對於同一根弦（材質、粗細相同）頻率與弦的長度成反比。人們很早

以前，就發現一根空弦所發出的聲音與同一根空弦但長度減半後所發出的聲音，具有非常和諧的效果，後來，這兩個音被稱為具有八度音的關係。

另外，畢達哥拉斯也發現當兩個弦長的比值為 $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{3}{4}$ 時，兩音所發出的聲音也非常和諧。

根據泰勒的公式我們可以知道：

一對八度音的頻率比等於 2:1。

弦長比為 2:3 時，頻率比等於 3:2。

弦長比為 3:4 時，頻率比等於 4:3

但由此我們只找到了七個音階中的三個音：假定一根空弦發出的音是 Do，則二分之一長度的弦發出高八度的 Do， $\frac{3}{4}$ 長度的弦發出 Fa， $\frac{2}{3}$ 長度的弦發出 So。至於其他的音是怎麼得到的？

由於我們知道當頻率為原來 2 倍時，兩音所發生的聲音非常和諧。因此，如果以 $\frac{3}{2}$ 的頻率比制出高八音的新音，則新音也會與原來的音非常和諧，即：

$$\left(\frac{3}{2}\right)^m \approx 2^n$$

經過計算有 $\left(\frac{3}{2}\right)^5 = 7.59375 \approx 8 = 2^3$ ；由此得出五個音列：

$$1, \quad \frac{3}{2}, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$$

但是，由於 $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2$ ，因此，將弦長增長 2 倍，即頻率減為原來的 $\frac{1}{2}$ ，音調降八度，使此音折合在八度音之內。同理， $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$ 、 $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$ 也分別降八度、十六度，最後就得到五度音階，如下表（四）：

表（四）五度音階

頻率	1	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4$
八度內頻率	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$
音階	Do	Re	Mi	So	La
音名	C	D	E	G	A

接下來，再根據 $\left(\frac{3}{2}\right)^7 = 17.0859375 \approx 16 = 2^4$ ；將剛才的基礎上上行一次，下行

一次，得到七個音列：

$$\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}, \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}, \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}, \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{243}{32}$$

再折合到八度音之內，如下表（五）：

表（五）七度音階

頻率	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4$	$\left(\frac{3}{2}\right)^5$
八度內頻率	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$
音階	Do	Re	Mi	Fa	So	La	Si
音名	C	D	E	F	G	A	B

由此七度音階產生。

觀察表（四），音階中相鄰兩音的頻率之比，通過計算之後知道有兩種情形，分別是 Do-Re、Re-Mi、Fa-So、So-La、La-Si，其頻率比為 9:8，稱為全音關係，另一個是 Mi-Fa、Si-Do，其頻率比為 256:243，稱為半音關係。然而以 2:1 與 3:2 的頻率比關係產生和諧音的法則，稱為五度律。

根據近似等式 $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 129.7 \approx 128 = 2^7$ ，仿照以上方法又可制出五度律十二聲音階如下表（五）：

表（五）五度律十二聲音階

音名	C	$\sharp C$	D	$\sharp D$	E	F	$\sharp F$
頻率	1	$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^9}{2^{14}}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^6}{2^9}$
音名	G	$\sharp G$	A	$\sharp A$	B	C	
頻率	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{3^5}{2^7}$	2	

五度律十二聲音階相鄰兩音的頻率比有兩種，一為 256:243，另一為 2187:2048，分別稱自然半音與變化半音。從表（五）中可看到，音名不同的兩音之間的關係為自然半音，例如 $\sharp C-D$ 的關係為自然半音，音名相同的兩音之間關係為變化半音，例如 $C-\sharp C$ 的關係為變化半音。

人們注意到五度律的十二聲音階中的兩種半音相差不大，如果消除這種差別對鍵盤樂器的轉調將十分方便，因為鍵盤樂器中每個鍵的音高是固定的，不像撥弦或是拉弦的樂器，音高是由手指位置來決定。為了消除兩種半音的差別，必需讓每個音之間頻率的比相等。這是一道中學生的數學題，「如何在 1 與 2 之間插入 11 個數，使得數字之間成等比數列呢？」

西元 1691 年，日耳曼風琴師 Werckmeister 提出了「十二平均律」，「十二平均律」就是在 1 到 2 這個八度音中均勻的分出十二個半音，相鄰兩個音的頻率比值都是 $2^{\frac{1}{12}}$ 也就是 $\sqrt[12]{2}$ ，由平均律構成的七聲音階，如下表（六）：

表（六）平均律構成的十二聲音階

音名	C	$\sharp C$	D	$\sharp D$	E	F	$\sharp F$
頻率	1	$\sqrt[12]{2}$	$(\sqrt[12]{2})^2$	$(\sqrt[12]{2})^3$	$(\sqrt[12]{2})^4$	$(\sqrt[12]{2})^5$	$(\sqrt[12]{2})^5$
音名	G	$\sharp G$	A	$\sharp A$	B	C	
頻率	$(\sqrt[12]{2})^7$	$(\sqrt[12]{2})^8$	$(\sqrt[12]{2})^9$	$(\sqrt[12]{2})^{10}$	$(\sqrt[12]{2})^{11}$	2	

因為每個半音差都相同，這使得轉調容易，不同的樂器也能夠一同演奏，但是十二平均律最大的缺點就是音不純，造成和絃效果不佳。

參、PATTERN

小星星是我們從小就熟悉的歌曲，請仔細地唱一遍，並注意音階之間的關係，有沒有發現其中的規律呢？這一組音符「Do, Do, So, So, La, La, So」稱為「主旋律」，樂曲中的「主旋律」會重複地出現，有時音階會升高，有時音階會降低，有時甚至會完全相反，我們說這就是「PATTERN」。

小星星

選一首自己喜歡的歌，試著找出它的「PATTERN」吧！

參考資料

- 柯拉·李與吉利安·奧瑞立著（維吉尼亞·格瑞與江長芳譯）（2008）。《數學大騷動》，台北：究竟出版社。
- 單維彰（2008）。〈平均律與對數律〉，《科學月刊》，97年9月『數·生活與學習』專欄。
- 丹尼斯·居耶德著（[漢斯譯](#)）（2003）。《鸚鵡定理：跨越兩千年的數學之旅》，台北：究竟出版社。
- 李奧維著（丘宏義譯）（2004）。黃金比例：1.61803.....的祕密，遠流。
- 張錦鴻著（1999）。新版基礎樂理。大陸書店。
- <http://www.hbxtsy2x.com/blog/user1/congcong/archives/2007/12781.html>
- http://www.edp.ust.hk/previous/math/history/5/5_3/5_3_25.htm

附件一、音樂與數學的交集學習單

一、音符

(一) 寫出下列音符的名稱：

1. 



2. 



(二) 寫出下列音符的形象：

1. 二分音符



2. 三十二分音符



(三) 在下列□處填入適當的音符，表明左方附點音符的長度：

1.  =  +

2.  =  +

(四) 在下列□處填入適當的音符，表明左方複附點音符的長度：

1.  =  + +

2.  =  + +

(五) 說明下列各拍號所代表的意義：

1. $\frac{2}{2}$

- 1、如果只由二分音符組成，則組成方式可能有幾種？
- 2、如果只由二分音符與四分音符，則組成方式可能有幾種？
- 3、如果只由二分音符、四分音符、八分音符，則組成方式可能有幾種？
- 4、如果只由二分音符、四分音符、八分音符、十六分音符，則組成方式可能有幾種？
- 5、如果只由二分音符、四分音符、八分音符、十六分音符、三十二分音符，則組成方式可能有幾種？

二、音階

(一) 指數

當我們在做連加的運算時，會使用乘法簡化記法，例如十個 2 相加，我們可以寫成 2 乘以十，也就是：

$$2+2+2+2+2+2+2+2+2+2=2\times 10$$

同樣地，當我們在做連乘的運算時，也會使用一種簡化記法，叫做**乘方**。例如十個 2 相乘，我們會寫成 2^{10} ，讀作「二的十次方」，也就是：

$$2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2=2^{10}$$

其中，2 稱為**底數**，右上方的 10 稱為**指數**。一般而言，n 個 a 相乘，我們會記為 a^n ，讀作「a 的 n 次方」，其中，a 稱為**底數**，右上方的 n 稱為**指數**。因此，

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$$

你能找出下列各式中的空格處應該填入多少嗎？

- 1、 $6 \times 6 \times 6 \times 6 = \square^\square$
- 2、 $(-2)^3 = \square$
- 3、 $9^2 \times 9^3 = 9^\square$
- 4、 $7^6 \div 7^3 = 7^\square$
- 5、 $(2 \times 10)^4 = 2^\square \times 10^\square$
- 6、 $\left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{4^{[\]}}{3^{[\]}}$

(二) 何謂等比數列呢？

一個數列，從第二項起，每一項與前項之比是一個相同的常數，則此數列為**等比數列**（又稱**幾何數列**），該常數稱為**公比**。

(三) 次方與根號有何關係呢？

若 n 為正整數，且 $a = b^n$ 時，我們就稱 b 為 a 的**n 次方根**，並記作 $\sqrt[n]{a} = b$ ，其中 $\sqrt[n]{a}$ 讀作「**n 次根號 a**」，並稱 a 為「**被開方數**」。當 n 為偶數且被開方數 a 為非負數；或當 n 為奇數且被開方數 a 為任意實數時， $\sqrt[n]{a}$ 有意義。

例如 $a = b^2$ ，則 b 為 a 的**二次方根**或稱**平方根**，又如 $a = b^3$ ，則 b 為 a 的**三次方根**或稱**立方根**。

在日耳曼風琴師 Werckmeister 提出了「十二平均律」是由那些頻率組成的呢？_____

其中公比為：_____，讀作「_____」

(四) 我們來看幾個等比數列的例子吧！

1、成書於 67-270 年的《孫子算經》中的等比數列問題：「今有出門望見九堤、堤有九木、木有九枝、枝有九巢、巢有九禽、禽有九雛、雛有九毛、毛有九色，問各有幾何？」

(1) 依序列出「堤、木、枝、巢、禽、雛、毛、色」的數量：

(2) 公比為：_____，

2、意大利數學家斐波那契 (1170-1250) 在 1202 寫的《計算書》中，也有一個類似的題目：「今有 7 老婦人共往羅馬，每人有 7 騾，每騾有 7 袋，每袋有 7 個麵包，每個麵包有 7 把小刀隨之，問列舉之物全數共幾何？」

(1) 依序列出「老婦人、騾、袋、麵包、小刀」的數量：

(2) 公比為：_____。

3、在 15-17 世紀的俄國數學家手稿中，也可看到同樣性質的題目：「有 40 個城市，每個城市有 40 條街道，每條街道有 40 座房子，每座房子裡有 40 根柱子，每根柱子有 40 個圓環，每個圓環上有 40 匹馬，每匹馬上裝著 40 個袋子，每個袋子裝 40 饅頭，統統算在一起共有多少？」

(1) 依序列出「城市、街道、房子、柱子、圓環、馬、袋子、饅頭」的數量：

(2) 公比為：_____。

三、PATTERN

以下是由施盈偉作曲的一首流行歌曲，請試著找出它的「PATTERN」吧！

The image shows four staves of musical notation in 3/4 time. The notes are: Staff 1: G4, A4, B4, C5, B4, A4, G4. Staff 2: G4, A4, B4, C5, B4, A4, G4. Staff 3: G4, A4, B4, C5, B4, A4, G4. Staff 4: G4, A4, B4, C5, B4, A4, G4. The pattern is a simple ascending and then descending scale.