

解一元一次方程式(1)

林壽福 臺北市國中數學輔導團/興雅國中

一、實施對象：一般班級 攜手課輔班級

二、教學目標

主 題	<input type="checkbox"/> 數與量 <input type="checkbox"/> 幾何 <input checked="" type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率 <input type="checkbox"/> 連結
相關分年細目(97)	7-a-04 能以等量公理解一元一次方程式，並做驗算。
教學目標	【用流程圖和旗幟圖表解方程】 2、能理解方程式解的意義就是方程式中未知數所代表的值。 3、能利用旗幟圖表（還原法）之逆運算原理求解一次方程式。

三、學習難點

一般學生學習解一元一次方程式時，經常出現的迷思概念，如： $30 = x + 7 \rightarrow 30 + 7 = x$ 或 $11x = 9 \rightarrow x = 11/9$ 或 $x + 37 = 50 \rightarrow x + 37 - 37 = 50 + 37$ 等。但 Perso (1996) 認為學生若能使用還原法 (undoing operations) [類似本篇設計使用之旗幟圖表法]，可以熟悉結構的起點與逆運算的概念，進而與移項法則進行比較，則能避免以上迷思概念的發生。此外，Bernard (1988) 等人認為使用還原法有一個重要意義：學生能將所學過的知識——四則運算、逆運算——用到解方程式的新問題情境中，如此可以訓練學生逆向思考及分析的解題能力，更能訓練學生連結新舊知識的能力。(參引書 1)

呂溪木 (民 77) 曾研究國小學生學習初等代數的學習困難，研究發現，在算術中會逆運算的學生，在學習解方程式的時候，學習成就較好，反之則學習成就較不好。因此建議學好逆運算的概念，將有助於學生學習方程式。(參引書 1)

四、補救教學內容處理：簡化 減量 分解 替代 重整

本篇設計針對有補救教學需求學生，採用「簡化」、「分解」、「替代」等方式調整以等量公理求解一元一次方程式之指標內容。先讓學生透過旗幟圖表（還原法）了解逆運算概念，降低認知負荷，並採小目標分開學習原則，以達成關係性理解之目標。

策 略	內容說明
簡 化	利用旗幟圖表（還原法），連結學生舊有之加減、乘除互逆經驗，鋪設階梯，降低難度，讓學生逐步理解解方程式之原理。
減 量	/

分 解	將旗幟圖表求解方程方法，分解為幾個小目標： 1. 透過流程圖，喚起學生加減、乘除互逆運算之經驗， 2. 圖示求解 $ax+b=c$ 和 $a(x+b)=c$ 類型。 3. 連結猜數遊戲學習代數式化簡，來活化教學、增添學習樂趣。 3. 圖示求解 $a-bx=c$ 類型。 4. 思考旗幟圖表解方程方法之優勢與限制。
替 代	以直觀之「旗幟圖表」方法代替等量公理學習求解方程，讓學生更容易學習成功。
重 整	/

五、教學規劃與實施

(一) 設計理念

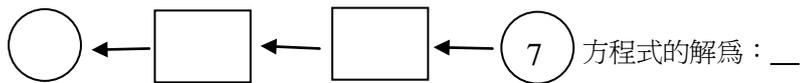
根據 97 課綱內容：6-a-01 能理解等量公理；6-a-02 能將分數單步驟的具體情境問題列成含有未知數符號的算式，並求解及驗算。亦即小六階段學生必須學會求解含未知數符號的單步驟情境問題，而求解的方法可用加減互逆

(2-a-04)、乘除互逆(3-a-01)，或等量公理(6-a-01)。(參引書 2) 即便如此，設計者還不曾在一般教科書中見過，能將三者作有效結合，因而能讓學生確實理解一元一次方程式的代數思維及解題策略者。因此，學生有可能僅僅學會解方程技術，而無法運用代數思維來進行思考。

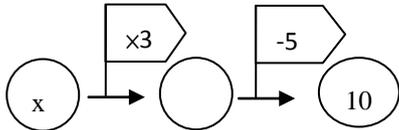
事實上，逆運算對於學習解方程是很重要的，所以讓學生盡快學習處理逆運算是相當重要的課題。本篇設計旨在透過旗幟圖表的逆運算(連結了加減、乘除互逆之舊經驗)體驗，讓學生能自然學會解方程的技巧，並且理解解方程的概念，同時也為後續應用等量公理和移項法則來解方程的學習，奠下厚實的基礎。設計者預想學生們會喜歡用這類旗幟圖表來處理問題，而這樣的問題就隱藏了代數思維的訓練。

(二) 教學活動

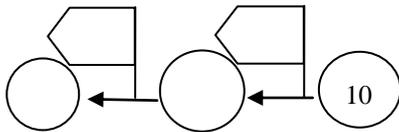
主要問題與活動	說明與評量重點
<p>【用流程圖與旗幟圖表解方程】(參引書 3)</p> <p>12、詩婷正想著一個數。把它乘 2 然後加 1，答案是 7。請問詩婷想的數是什麼？</p> <p>(1) 用幾句話寫下你怎麼得到答案的。看看底下流程圖。</p> <p>(2) 妳應該在空盒子裡放進什麼指令使你能得到正確答案？</p>	<p>12、A:(1)最後一步是加 1，所以在做加之前，這個數一定是：$7-1=6$。什麼數的 2 倍得到 6 呢？啊！是 3。用方程式表達就是：$2x+1=7$。</p> <p>(2) 方程式的解為：$x=(7-1)\div 2=3$。</p> <p>(此題不僅培養學生把文字表達轉化為代數表達的能力，也培養學生逆向思維與推理能力。)</p>



13、我們也可以用旗幟圖表來表示方程式，例如： $3x - 5 = 10$ 。



請你仿上題解法，利用逆轉這個圖表來求方程式的解。



14、給下列方程式畫旗幟圖表，然後把圖表逆轉來求方程式的解。

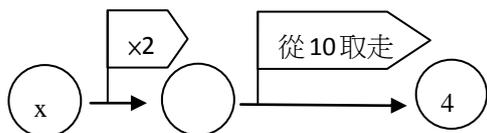
(1) $2x + 4 = 8$; (2) $\frac{x}{5} - 2 = 8$; (3) $2(3x - 5) = 8$

作業：

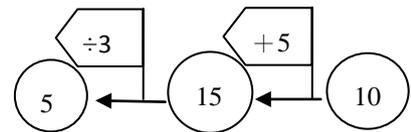
(1) $3(x + 2) = 6$; (2) $\frac{4x - 3}{7} = 7$; (3) $\frac{3(2x + 1)}{6} - 4 = 1$

15、告訴你的同伴：「我現在想了一個數，請你把它設為 X，寫在紙上。」我把它減 2，再乘以 3，再加 7，請你的同伴把你的代數式化簡好（約等候 5~10 秒鐘），告訴他你現在的數是 16。請你的同伴把你原來所想的數，寫在紙上，並且和你核對答案。（試試看！請利用旗幟圖表解題。）

16、方程式 $10 - 2x = 4$ 的形式是： $a - bx = c$ 。它的旗幟圖表如下：



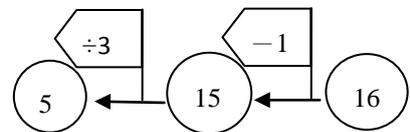
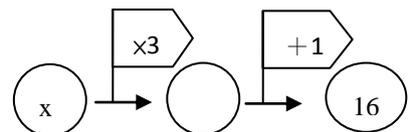
13、A: $x = (10 + 5) \div 3 = 5$ 。



14、A: (1) $x = 2$; (2) $x = 50$; (3) $x = 3$ 。
（這個方法可以適用於所有型如： $ax + b = c$ 和 $a(x + b) = c$ 的方程式。）

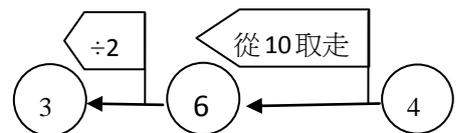
作業：視學生程度，由教師彈性選擇給的分量。

15、A: $(x - 2) \times 3 + 7 = 3x + 1 \rightarrow 3x + 1 = 16 \rightarrow x = 5$ 。先作代數式化簡（舊經驗），再求解。



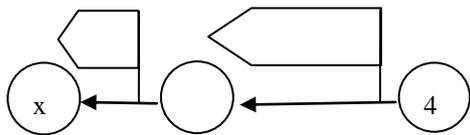
此題需要的解題能力更高了，學生同時體驗到猜數遊戲的原理，和解方程式的過程。

16、A:



「從...中取走」的逆運算是什麼呢？例如： $8 - x = 2$ ，你會發現唯一得到 6 答案的方式，是從 8

如果我們逆轉這個旗幟圖表：



你會在這個旗幟裡面放進什麼運算以便獲得正確答案？（注意：從 10 拿走和拿走 10 是不一樣的，他們得到的結果也是很不相同的。）

17、給下列方程式畫旗幟圖表，並用這些圖表解這些方程式。

(1) $8 - 3x = 2$; (2) $21 - 3(x + 4) = 3$; (3) $12 - \frac{x}{3} = 10$; (4)

$$10 - \frac{8}{x} = 6$$

作業：

(1) $\frac{24}{3x} - 3 = 1$; (2) $\frac{14}{3x} - 3 = 1$; (3) $7 - \frac{6}{2(4-x)} = 4$

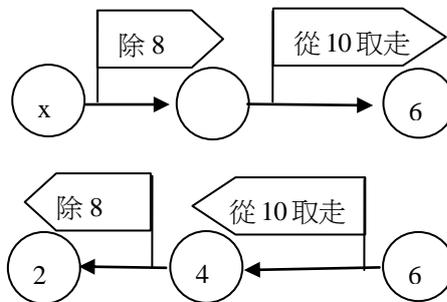
18、你能想出一個用旗幟圖表不能求解的方程式例子嗎？為什麼不能解？

取走 2。所以「從...中取走」的逆運算就是自己的逆運算，又稱自反運算。

類似的問題（和解）也出現在下列類型的方程式中：

$$\frac{a}{x} + b = c, \quad \frac{b}{ax} = c, \quad \text{和} \quad b - \frac{a}{x} = c。$$

17、(1) ~ (3) 略。(4) 解題如下：



這兩個都是自反運算。

18、這種解方程式的方法是有限制的，它只能用來解未知數 x 只出現一次的方程式。不能用來解下列例子的方程式：

$$2x + 3 = 5x - 4; \quad 10 - x = 3x - 4;$$

$$\frac{3}{x} + \frac{5}{2x} = 10$$

因為這種圖表只可能對 x 一次處理一種運算。這種方法的優勢：(1) 容易被接納，及理解潛在過程，比較直觀；(2) 直觀的感覺一旦被培養了，繼續向解方程式的技巧邁進就變得可能了；(3) 解題規則很自然被習得。劣勢：(1) 耗費時間；(2) 比起傳統方法效率低。此題多數學生可能無法作答，教師可以直接補充說明即可。

六、學生表現與教學省思

設計者找五位八年級資源班學生進行教學實驗，其中三位輕度智障、一位聽障和一位自閉症。一元一次方程式(1)共進行 2.5 節課教學（含前測時間）；另一元一次方程式(2)則進行 1.5 節課教學，時間恰好。從前測顯示：甲、乙兩位輕障生和丙（聽障），都無法自行解方程式。其中兩位分別出現底下錯誤類型：① $7 \div x = 28$, $x = 28 \div 7 = 4$ ；② $2x + 5 = 15$, $2x = -15 + 5$ ；③ $3(x + 2) = 6$, $= 3(x + 2) = 3x + 2 = 5x$ 。原因在

於，學生深受算術思維影響認為相加就是要求出答案，而且認為答案必須是一個數或只有一項，以及缺乏逆運算和結構性概念，因而混淆了移項法則的使用所造成的結果。丁生（輕障）出現底下錯誤類型： $7 \div x = 28$ ， $x = 28 \times 7$ ， $x = 196$ ； $3(x+2) = 6$ ， $x+2 = 6-3$ ， $x+2 = 3$ ， $x = 1$ ； $28 - 2(x+2) = 14$ ， $x+2 = 14 - 28 + 2$ ；以及不會處理 $-x = -32$ 問題。除了「數字和符號的加乘混用」之外，也是缺乏逆運算和結構性概念所致。前測整體表現，誠如設計者前面對學生「學習難點」之描述，相當符應。

設計者運用旗幟圖表之逆運算法教學，效果良好，發現學生很容易聽懂，也很容易操作。上課中進行之練習，除了甲生、乙生之外，其餘三位都能順利解答。如果時間充裕，能再放慢腳步，多讓學生思考和操練，相信效果會更好。並且當後續學習移項法則時，若能再回頭一起對照先前所學這些旗幟圖表操作原理，則對逆運算和結構性概念的建立將更為鞏固。

七、學習資源與參考資料

謝孟珊（2000）以不同符號表徵未知數對國二學生解方程式表現之探討。國立臺北師範學院數理教育研究所碩士論文。

教育部（2010）國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。臺北：教育部。

J.L. Martin 著，史靜寰 審譯（2004）教與學的新方法•數學（下冊）。中國：北京師範大學出版社。

八、附件

(一)

解一元一次方程式(1) 前測

解下列一元一次方程式：

年 班 號 姓名：

1. $-4-x=6$

2. $7\div x=28$

3. $28\div 2x=14$

4. $14-\left(\frac{x}{2}\right)=10$

5. $7-x=-5$

6. $28-2(x+2)=14$

7. $2x+5=15$

8. $\frac{x}{5}-10=20$

9. $3(x+2)=6$

10. $10-\frac{8}{x}=6$

(二)

解一元一次方程式(1) 後測

解下列一元一次方程式：

年 班 號 姓名：

1. $-5-x=8$

2. $14\div x=28$

3. $32\div 2x=16$

4. $15-\left(\frac{x}{3}\right)=10$

5. $8-x=-4$

6. $32-2(x+3)=16$

7. $3x+2=14$

8. $\frac{x}{7}-7=21$

9. $2(3x-5)=8$

10. $12-\frac{15}{x+2}=7$