

等差級數求和公式的理解

臺南市國中數學輔導團/忠孝國中 蘇恭弘

臺南市國中數學輔導團/後甲國中 張靖宜

一、實施對象：八年級（一般班級 攜手課輔班級）

二、教學目標

主 題	<input checked="" type="checkbox"/> 數與計算 <input type="checkbox"/> 量與實測 <input type="checkbox"/> 幾何 <input type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率
相關分年細目(97)	8-n-06 能理解等差級數求和的公式，並能解決生活中相關的問題
教學目標	讓同學理解等差級數求和公式的由來，並能試著解決生活情境中的問題

三、學習難點

- 學生常常是將等差級數求和的公式背下來，如果遇到符合公式的樣子的數據，就會答對，但是若題意稍作調整，就無法正確解題。

四、補救教學內容處理：簡化 減量 分解 替代 重整

- 調整時可採一種或多種方式進行
- 教學規劃以 1-2 節課能達成爲原則
- 涉及教學目標調整幅度較大者請謹慎使用並清楚說明

教學處理	內容說明
簡 化	調整教學目標內涵之難度或認知程度
減 量	減少教學目標內涵的內容份量
分 解	將教學目標分解爲幾個小目標進行教學
替 代	將教學目標以另一種方式或表徵來達成
重 整	以生活化或功能性的型態達成教學目標

五、教學規劃與實施


(一) 設計理念

一般教師在推導等差級數公式時，經過解說之後，最後通常會以「梯形公式」來說明，但是有了這個簡易的結論，雖然可以讓多數的學生作出題目，但是對於學習落的學生並無法理解，等差級數求和的公式與「梯形公式」有任何關連，本教案嘗利用操作與實例的說明，讓學生體會與理解等差級數求和的公式。

(二) 教學活動

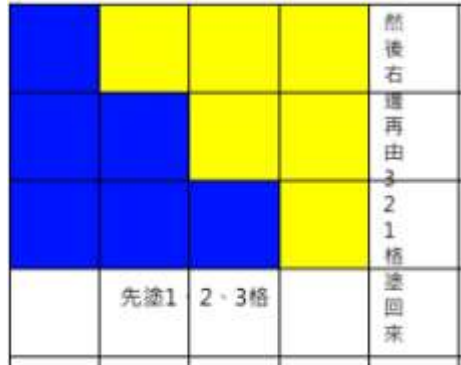
主要問題與活動	說明與評量重點
一、由生活中的實例，請同學想一想如何解決要求出總和的問題。 例 1: 有多少張椅子?	1.引起學生願意去計算的動力。 2.由生活中的物品作例子，而且從擺放不太有規律的物品，到愈來愈來規律的情況。 3.同學願意參與就給予鼓勵。

主要問題與活動	說明與評量重點
 <p>例 2: 牆上有多少個突出物?</p>  <p>例 3: 在方框內有多少個房間? (如果一個窗戶代表一個房間)</p>  <p>例 4: 有多少個三角形?</p>  <p>例 5: 有多少個紅色的磁磚?</p> 	<p>例 1: 23 張椅子</p> <p>例 2: 21 個突出物</p> <p>例 3: 40 間</p> <p>例 4: 18 個</p> <p>例 5: 16 個</p> <p>例 6: 120 顆</p>

主要問題與活動	說明與評量重點
<p>例 6: 共有多少顆鐵珠?</p>  <p>【結論】 如果要計算的物品，沒有明顯規則的話，要計數的話很不方便;但是如果有規則的話，算起來比較快。</p> <p>二、由例 6，我們知道要真的動手去數，雖然不失為一個方法，有時候還真的挺累人的，所以，老師希望同學利用作業單上提供的方格紙，將算式畫成格子，看看改用這種方法，會不會讓同學們發現計算總和時的秘密。</p> <p>如果我們不想只是用「數」的方式解決求總和的問題，有沒有別的求法? 以計算 $1+2+3=?$ 為例: 我們可以利用塗方格的方式來計算， 【作法】 在紙上塗出 1 格、2 格與 3 格，然後在旁邊再從 3 格、2 格、1 格塗回來，同學們會發現，我們塗色的部份變成了一個長方形! 長為 4 格、寬為 3 格，所以共有 12 格，但是我們塗了 2 次，因此全部只有 $12 \div 2=6$</p>	<p>說明與評量重點</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 鼓勵同學除了直接相加計算之外，是否可以利用「圖形」輔助，看出計算的訣竅。 2. 在方格上塗色時，可以沒有不同顏色的筆，可以讓同學，以畫斜線的方式來塗色。 <p>◆ 也可以同學的接受度改成「剪紙」，剪成兩塊相同的紙片，再試著拼成一個長方形</p> <p>註: 因怕印刷時顏色不好區分，在旁邊疊合的同一塊圖形，以「空白」來表示。</p>

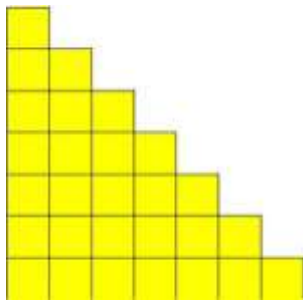
主要問題與活動

說明與評量重點

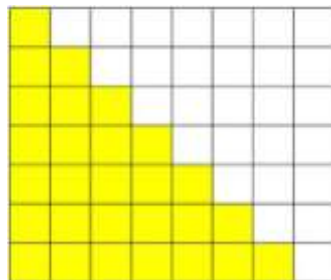


所以 $1+2+3=(4 \times 3) \div 2$
 $=6$

例 1: 求 $1+2+3+4+5+6+7=?$



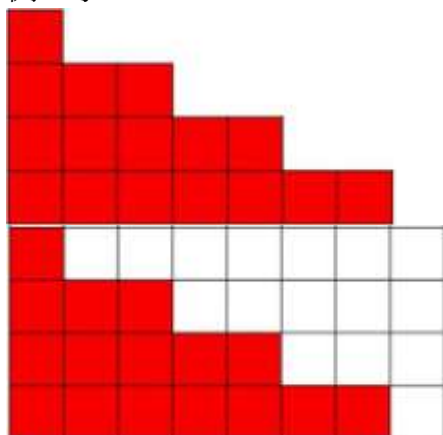
依照上面的作法，同學們發現塗完色之後，長、寬各是多少格呢？

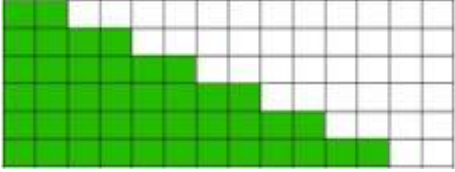



長為 8 格、寬為 7 格，所以共有 56 格，
 但是我們塗了 2 次，因此全部只有 $56 \div 2=28$

所以 $1+2+3+4+5+6+7=(8 \times 7) \div 2$
 $=28$

例 2: 求 $1+3+5+7=?$



主要問題與活動	說明與評量重點
<p>長為 8 格、寬為 4 格，所以共有 32 格，但是我們塗了 2 次，因此全部只有 $32 \div 2 = 16$</p> <p>所以 $1+3+5+7 = (8 \times 4) \div 2 = 16$</p> <p>例 3: 求 $2+4+6+8+10+12 = ?$</p>  <p>由上圖知，長為 14，寬為 6，所以共有 84 格，但是我們塗了 2 次，因此全部只有 $84 \div 2 = 42$</p> <p>所以 $2+4+6+8+10+12 = (14 \times 6) \div 2 = 42$</p> <p>◆ 由以上的例子，同學是否發現它們都有共同的特性？</p> <p>總和可以看成一個長方形的格子數，而這個長方形的長是【第一個數字與最後一個數字相加】，而寬是【有多少個數字要相加】，最後因為我們將總和算了兩次，所以答案還需除以 2。</p> <p>以數學符號來表示就是</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\text{總和} = \frac{\text{項數} \times (\text{首項} + \text{末項})}{2}$ </div> <p>三、練習題</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 計算 $5+10+15+20+25+30 = ?$ 2. 計算 $3+6+9+12+15+18+21 = ?$ 3. 計算 $1.2+1.4+1.6+1.8+2+2.2+2.4+2.6 = ?$ <p>◆ 想一想，塗格子的方法是固定的嗎，會不會影響我們對於答案的計算？</p> <p>以求 $2+4+6+8+10+12 = ?$ 為例</p> <p>原本我們的塗法是</p>  <p>如果有同學把它塗成以下的樣子，可以算得出來嗎？</p>	<p>◆ 針對理解能力較佳的同學，可以適度地引導，利用「等差中項」求和的觀念。</p> <p>3. 盡量先不出現求 n(項數)的題目，避免同學產生太大的困擾。</p> <p>◆ 如果同學在等差數列部份--求首項或末項，觀念尚不清楚時，可適時再給以予說</p>

主要問題與活動	說明與評量重點
<div data-bbox="301 197 775 432" data-label="Figure"> </div> <p data-bbox="288 432 738 539">所以 $2+4+6+8+10+12 = (12 \times 7) \div 2$ $= 7 \times 6$ $= 42$</p> <p data-bbox="284 546 804 622">好像也可以，不過似乎可以變成兩個數目字相乘喔。</p> <p data-bbox="288 667 751 701">重新檢驗一下，上面的其他題目：</p> <p data-bbox="288 707 635 815">$1+2+3+4+5+6+7 = (8 \times 7) \div 2$ $= 4 \times 7$ $= 28$</p> <p data-bbox="288 822 533 929">$1+3+5+7 = (8 \times 4) \div 2$ $= 4 \times 4$ $= 16$</p> <p data-bbox="288 965 491 999">觀察上面 3 題：</p> <p data-bbox="288 1008 579 1041">$2+4+6+8+10+12 = 7 \times 6$</p> <p data-bbox="288 1048 579 1081">$1+2+3+4+5+6+7 = 4 \times 7$</p> <p data-bbox="288 1088 478 1122">$1+3+5+7 = 4 \times 4$</p> <p data-bbox="288 1128 692 1162">有沒有發現什麼特別的事呢？</p> <p data-bbox="288 1169 596 1202">6 和 8 的等差中項是 7</p> <p data-bbox="288 1209 596 1243">3 和 5 的等差中項是 4</p> <p data-bbox="288 1249 772 1283">利用上一節提過的等前中項的概念</p> <p data-bbox="252 1290 509 1323">，同學們可以發現：</p> <div data-bbox="320 1330 619 1364" data-label="Equation-Block"> $\boxed{\text{總和} = \text{等差中項} \times \text{項數}}$ </div> <p data-bbox="240 1406 809 1482">四、如果遇到首項、末項其中一個數字，不是已知時，能不能求出總和呢？</p> <p data-bbox="288 1489 355 1523">例 1：</p> <p data-bbox="288 1529 825 1606">等差數列的首項為 2，公差為 3，請問此數列前 10 個數字之和為何？</p> <p data-bbox="288 1612 379 1646">說明：</p> <p data-bbox="284 1653 820 1729">利用之前學過的末項的求法，我們可以得到</p> <p data-bbox="288 1736 579 1769">第 10 項為 $2+3 \times 9=29$</p> <p data-bbox="288 1776 804 1852">因此，同學們可以由總和的公式算出此數列前 10 項之和為</p> <p data-bbox="288 1859 544 1892">$(2+29) \times 10 \div 2=155$</p> <p data-bbox="272 1935 339 1968">例 2：</p> <p data-bbox="284 1975 820 2051">等差數列的第 10 項為 22，公差為 2，請問此數列前 10 個數字之和為何？</p>	<p data-bbox="853 197 1007 230">明與練習。</p>

主要問題與活動	說明與評量重點
<p>說明: 利用等差數列的特性，我們得先算出首項: $\text{首項} + 9 \times 2 = 22$ 所以首項 = 4 因此，同學們可以由總和的公式算出此數列前 10 項之和為 $(4 + 22) \times 10 \div 2 = 130$</p> <p>五、練習題</p> <p>1. 等差數列的首項為 3，公差為 2，請問此數列前 12 個數字之和為何?</p> <p>2. 等差數列的首項為 14，公差為 -2，請問此數列前 20 個數字之和為何?</p> <p>3. 等差數列的第 16 項為 24，公差為 2，請問此數列前 16 個數字之和為何?</p> <p>4. 等差數列的第 20 項為 30，公差為 -2，請問此數列前 20 個數字之和為何?</p>	

六、學生表現與教學省思

在教學的過程中，因為這部份的考試內容大部份屬於綜合應用類，所以當同學學會了基本的概念與作法之後，雖然他們產生了一些「數學成就感」，但是當要他們實際去解決如基測之類的考題時，同學就會顯得吃力，所以部份同學的「數學成就感」不易維持。

七、學習資源參考資料

國中翰林版教科書
 數學王子的家網站

八、附件

- 如學習單或學生解題記錄
 見下一頁

【數學補救教學活動設計】等差級數求和公式的理解 學習單

在以下的活動中，我們希望讓同學體會等差級數求和的公式的由來，請和老師一起來探險與挑戰。

【活動一】 猜猜看，有多少個？

例 1: 有多少張椅子?	例 2: 牆上有多少個突出物?	例 3: 在方框內有多少個房間? (如果一個窗戶代表一個房間)
		
答	答	答
例 4: 有多少個三角形?	例 5: 有多少個紅色的磁磚?	例 6: 共有多少個鐵珠?
		
答	答	答

【活動二】 動手作，算總和。

由例 6，我們知道要真的動手去數，雖然不失為一個方法，有時候還真的挺累人的，所以，老師希望同學利用作業單上提供的方格紙，將算式畫成格子，看看改用這種方法，會不會讓同學們發現計算總和時的秘密。

範例: 計算 $1+2+3=?$

作法: 在紙上塗出 1 格、2 格與 3 格，然後在旁邊再從 3 格、2 格、1 格塗回來，同學們會發現，我們塗色的部份變成了一個長方形!(在方格上塗色時，可以沒有不同顏色的筆，同學們可以改用畫斜線的方式來塗色。)



<p>例 1: 求 $1+2+3+4+5+6+7=?$</p>	<p>例 2: 求 $1+3+5+7=?$</p>	<p>例 3: 求 $2+4+6+8+10+12=?$</p>
<p>你的答案是</p>	<p>你的答案是</p>	<p>你的答案是</p>
<p>同學們，你發現了如何能計算出這些題目，比較快的方法了嗎? 你的想法是:</p>		
<p>練習題</p>		
<p>1. 求 $5+10+15+20+25+30=?$</p>	<p>2. 求 $3+6+9+12+15+18+21=?$</p>	<p>3. 求 $1.2+1.4+1.6+1.8+2+2.2+2.4+2.6=?$</p>

【活動三】 條件改，算總和。

如果遇到首項、末項其中一個數字，不是已知時，能不能求出總和呢？

例 1: 已知等差數列的首項為 2，公差為 3，請問此等差數列前 10 個數字之和為何？

說明

利用之前學過的末項的求法，我們可以得到第 10 項為 $2+3\times 9=29$

因此，同學們可以由總和的公式算出此數列前 10 項之和為

$$(2+29)\times 10\div 2=155$$

例 2: 已知等差數列的第 10 項為 22，公差為 2，請問此等差數列前 10 個數字之和為何？

說明

利用等差數列的特性，我們得先算出首項: $\text{首項}+9\times 2=22$ 所以首項=4

因此，同學們可以由總和的公式算出此數列前 10 項之和為

$$(4+22)\times 10\div 2=130$$

<p>練習題</p> <p>1. 已知等差數列的首項為 3，公差為 2，請問此等差數列前 12 個數字之和為何？</p>	<p>2. 已知等差數列的首項為 14，公差為 -2，請問此等差數列前 20 個數字之和為何？</p>
<p>4. 已知等差數列的第 16 項為 24，公差為 2，請問此等差數列前 16 個數字之和為何？</p>	<p>4. 已知等差數列的第 20 項為 30，公差為 -2，請問此等差數列前 20 個數字之和為何？</p>

同學們，學會了嗎？動手試試看，您會發現「等差級數」一點也不難喲，加油~