

指數律

葉家綺 新竹市國中數學輔導團/虎林國中

林振隆 新竹市國中數學輔導團/虎林國中

一、實施對象：七年級

二、學習難點

對七年級學生而言，指數律是一個全新的學習。在指數的基本意義方面，由於其連乘性質，學生常與乘法混為一談，產生直覺性的運算，例如將 2^3 寫成 6。而在指數律的應用方面，學生亦常將 $2^3 \times 2^4$ 寫成 $2^{3 \times 4}$ ，或是 $(2^3)^4$ 寫成 2^{3+4} 等。沈長榮 (2003)、黃漢淳 (2001)、陳怡如 (2007)、郭侑玄 (2009)、張嵐雄 (2010) 等人，各針對了國高中學生作錯誤類型的探究，發現學生在多项式的乘除運算、指數函數、對數函數問題等所產生的迷思概念，有一部份原因來自於對指數律的概念模糊。足見此一觀念的基礎重要性。

本校本學期七年級數學的第一次定期評量測驗中，出現了一道運用指數律的題目：「 $4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 = 2^\square$ ，則 $\square = ?$ 」這個問題雖然不是非常淺顯易答，但七年級學生錯答的比率卻出奇的高。針對四個班共 116 位學生分析，發現此題做錯的學生竟高達 95 位，也就是有大約 82% 的學生做錯，做對的學生只有 21 位 (18%)，分析結果如下表一所示。表一中顯示 95 位錯答的學生中，有 15 位 (約 15.8%) 將答案寫成 12 (誤用指數律 $a^m \times a^n = a^{m+n}$)，顯示其有基本的指數律概念；而有 36 位 (約 37.9%) 將答案寫成 24 (誤用指數律 $(a^m)^n = a^{m \times n}$ 與 $a^m \times a^n = a^{m+n}$)，顯示其指數律觀念很不錯，但仍然無法區別連加與連乘的指數運算；另外有 44 人是屬於不合邏輯的運算或空白。以上這三種錯誤類型詳見附件一。

據此分析結果，研究者認為大約有一半的學生對於指數律的基本定義不是很熟悉，而有另一半的學生已有基本概念，但無法做更精緻的連結與運算。故而著手設計具高度結構性且符合兩者需求的學習單。如附件二。

表一：116 位學生在「 $4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 = 2^\square$ ，則 $\square = ?$ 」的答題狀況

	人數
全部人數	116 人
(1) 做對此題	21 人 (18%)
(2) 做錯此題	95 人 (82%)
做錯的 95 位學生中：	
(1) 直接將指數相加 $3+3+3+3=12$	15 人 (15.8%)
(2) 指數相加後乘以 2 倍 $(3+3+3+3) \times 2=24$	36 人 (37.9%)
(3) 不合邏輯的指數運算或空白	44 人 (46.3%)

三、教學目標

主 題	■數與計算 □量與實測 □幾何 □代數 □統計與機率
分年細目(97)	7-n-13 能理解底數為整數且指數為非負整數的運算。
教學目標	1.能了解基本的指數律意義： $m, n \geq 0, a^m \times a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}$ 。 2.能運用指數律做運算。

四、補救教學內容處理：簡化 減量 分解 替代 重整

補救教學與一般教學不同，需以「簡化」、「減量」、「分解」、「替代」及「重整」等方式調整各項能力指標，以及決定教學內容。本課程設計，以「減量」、「分解」、「替代」為主。說明如下表。

策 略	內容說明
減 量	1、介紹之指數律僅限於乘法類的兩個公式(除法先不談)。 2、佈題的底數與指數僅限於正整理。
分 解	將能力指標分解為幾個小目標： 1、分別利用數值將各公式具體化，呈現其內涵。 2、接以練習相關問題以增強其理解性。 3、將連加與連乘問題並列，釐清其內涵。
替 代	將連乘性質逐一拆解，以更了解問題內涵。避免直接代公式計算。

五、教學規劃與實施

(一) 設計理念

本次補救教學的課程內容設計，首先考慮的原則為由易至難、由簡而繁，以建立學生的自我信心與幫助學生能真正理解指數律的意義。故在教學上著重於將指數連乘的性質拆解成學生看得懂的樣子，並以此方式做相關的練習題。

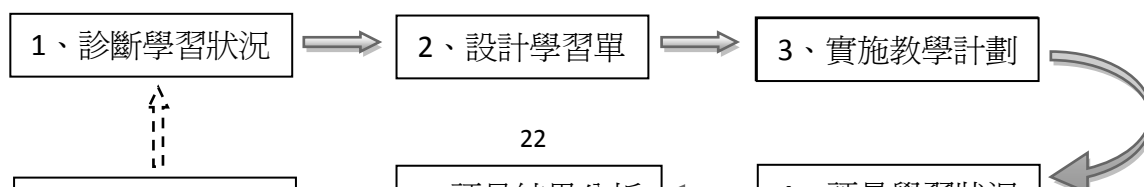
第二，本課程學習單之內容具高度的結構性，明確掌握此次學習的目標：

- (1)使完全不了解指數律的學生能對公式的內涵有所領悟，並能做對相關的問題。
- (2)使對指數律已有初步了解的學生，更自在的運用指數律運算相關問題之外，還能分辨「連加」與「連乘」型的問題之不同與運算處理方式。

張新仁(2001)引述學者研究，認為使用直接教學法、合作式學習、精熟教學，以及個別化教學等教學策略，皆能夠有效幫助低成就學生。此外，行為管理也可以視為有效的介入過程。由於本單元內容為簡單的理解與操作，故研究者採用直接教學法，輔以適當的行為管理與口頭鼓勵介入，作為此次補救課程的教學策略。

(二) 研究與活動流程

下圖一是本次補救教學與實證研究之流程。首先是分析學生在定期評量中的答題表現(姑且稱為「前測」)，結果已如上表一所示。第二，設計高組織性內容的教學單與評量單(如附件三)。第三，採用直接教學法與行為管理、口頭鼓勵介入歷程，共2節課。第四為後測，以了解學生的學習狀況。第五，對此後測結果做分析。第六，將前後測結果相比較，並討論本次補救教學是否達到教學目標，接以期望修正後，未來能讓一線的老師使用。



圖一：研究與活動流程

(三) 教學活動

主要問題與活動	說明與評量重點
<p>【以故事介紹指數定義】</p> <p>1、你有聽過聚寶盆的故事嗎？如果在聚寶盆內放入 1 個金幣，則第 1 天會變成 2 個，第 2 天每個金幣會再變成 2 個，總共有 4 個金幣 ($2 \times 2 = 4$)；第 3 天每個金幣再各自變成 2 個，總共有 8 個金幣 ($2 \times 2 \times 2 = 8$)。照這樣的規律繼續下去，在第 10 天時，總共會有多少個金幣呢？</p> <p>2、介紹指數定義 我們將連續 10 個 2 相乘簡記成 2^{10}。在數學上，a^m 讀做「a 的 m 次方」，其中 a 稱為底數，m 稱為指數。所以上面這個例子中，2 稱為底數，10 稱為指數。</p> <p>3、問學生：你知道 3^5 的意思嗎？ 答案是 15 嗎？</p> <p>4、請學生續寫練習題(3)、(4)，並在黑板上揭示各題作法。</p> <p>5、學生在練習過程中可自由提問。</p>	<p>第1天 2 第2天 2×2 第3天 $2 \times 2 \times 2$ 第10天 ? 第10天的金幣共有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 1024$ (個) 10個2相乘</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> a^m — 指數 └── 底數 </div> <p>請學生寫出 $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$， 並回答出 $3^5 = 243$。</p> <p>務必要求學生將 3^5 拆解成 $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$，使其明白指數的「連乘」內涵，例如：</p> $3^5 = ?$ <p style="text-align: center;">↑ $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$</p>
主要問題與活動	說明與評量重點

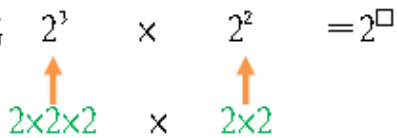
【介紹第一個指數律】

- 1、先在黑板上寫出 $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- 2、問學生是否知道 $2^3 \times 2^2 = 2^{\square}$
示範將題目拆解，使學生理解
 $2^3 \times 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$
- 3、接著再示範(2) $3^3 \times 3^4 = 3^{\square}$
- 4、請學生續寫練習題(3)~(6)，並在黑板上揭示各題作法。
- 5、學生在練習過程中可自由提問。

【介紹第二個指數律】

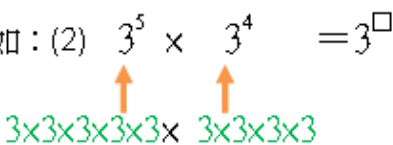
- 1、先在黑板上寫出 $(a^m)^n = a^{m \times n}$
- 2、問學生是否知道 $(2^3)^4 = 2^{\square} = 2^{\square}$
- 3、示範將題目拆解，使學生理解
 $(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$
- 3、接著再示範(2) $(5^2)^3 = 5^{\square} = 5^{\square}$ 、
(3) $9^4 = (3^{\square})^4 = 3^{\square}$ 及 (4) $8^2 = (2^{\square})^2 = 2^{\square}$
- 4、請學生續寫練習題(5)~(12)，並在黑板上揭示各題作法。
- 5、學生在練習過程中可自由提問。

黑板上寫出 $2^3 \times 2^2 = 2^{\square}$

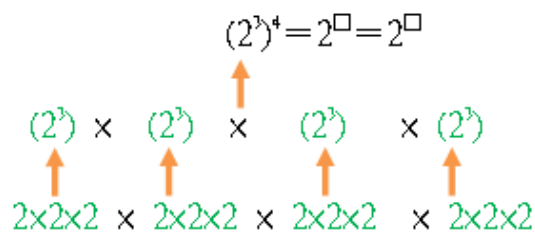


務必要求學生將 3^3 拆解成 $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ ，使其明白此指數律由「連乘」轉變成「連加」的內涵，例如：

(2) $3^5 \times 3^4 = 3^{\square}$



黑板上寫出

$$(2^3)^4 = 2^{\square} = 2^{\square}$$


務必要求學生將拆解過程寫出，使其明白此指數律的「連乘」依然是「連乘」的內涵，

例如：(2) $(5^2)^3 = 5^{\square} = 5^{\square}$



由於第(3)和第(4)題是稍有變化的題目，所以要特別注意學生是否確實拆解、是否有疑問，以及要特別給予學生口頭鼓勵。

<p>【比較「連乘」和「連加」的問題】</p> <p>1、在黑板上並列出兩個問題：</p> <p>(1) $2^3 \times 2^3 = 2^{\square}$ (2) $2^3 + 2^3 = 2^{\square}$</p> <p>2、問學生這兩個問題的差異為何？</p> <p>3、請學生猜想，這兩個問題的答案會一致嗎？</p> <p>4、示範將題目拆解，使學生理解這兩個問題的不同。</p> <p>5、說明有些學生可能會犯的錯誤。</p> <p>6、問學生 $2^3 + 2^3$ 會等於 2^6 嗎？</p> <p>7、提示學生可以驗算</p> <p>8、請學生續寫練習題(3)~(6)，並在黑板上揭示各題作法。</p> <p>5、學生在練習過程中可自由提問。</p>	<p>須等到學生察覺出一個是「連乘」問題、一個是「連加」問題，才能再繼續。</p> <p>不論學生回答為何，不要否定他的答案，保留這個想法，待老師解出後，再請學生比較他原先的答案。</p> <p>連乘 $2^3 \times 2^3 = 2^{3+3} = 2^6$</p> <p>$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$</p> <p>連加 $2^3 + 2^3 = 2 \times 2^3 = 2^{1+3} = 2^4$</p> <p>$2 \times 2^3$</p> <p>黑板上寫 $2^3 + 2^3 = ? \quad 2^6$</p> <p>不論學生回答為何，不要否定他的答案，保留這個想法，待老師解出後，再請學生比較他原先的答案。</p> <p>$2^3 + 2^3 \neq 2^6$</p> <p>$8 + 8 \quad 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$</p> <p>由於第(3)~(6)題皆是比較連乘與連加的問題，所以要特別注意學生是否確實拆解、是否有疑問，以及要特別給予學生口頭鼓勵。</p>
--	--

六、學生表現與教學省思

(一) 評量單(後測)結果與分析

研究者針對本次課程內容設計 4 個問題為後測評量單。其中第 1 題對應到第一個指數律；第 2、第 3 題對應到第二個指數律，並稍加變化；第 4 題是連加題，故意不提醒學生，以便與定期評量(前測)做比較。評量結果如下表二所示。

表二：116 位學生在後測的答題狀況，並與前測比較

	後測	前測
	人數	人數
全部人數	116 人	116 人
第 1~3 題全對	59 人(51%)	
第 1~3 題全錯	10 人 (9%)	
做對第 4 題	47 人(40%)	21 人(18%)
做錯第 4 題	69 人(60%)	95 人(82%)
做錯第 4 題的 69 人當中：	69 人	95 人
(1)直接將指數相加 $2+2+2+2+2=10$	14 人	15 人
(2)指數相加後乘以 2 倍 $(2+2+2+2+2)\times 2=20$	17 人	36 人
(3)不合邏輯的指數運算或空白	38 人	44 人

本研究的源起於定期評量中的問題：「 $4^3+4^3+4^3+4^3=2^{\square}$ ，則 $\square=?$ 」這個連加型的指數問題自然是稍具挑戰性，且不是學生能立即給出答案的題目，因此在分析時，我們將後測中的 4 個問題分為 2 個向度：第 1~3 題與第 4 題。

首先，由上表二可看出，針對第 1~3 題而言，完全答對的人數佔了 59 人，佔全部人數約 51%，完全答錯的 10 人，佔全部人數約 9%。足見本次補救教學之課程內容設計與實施，對大部份學生在關於乘法的兩個指數律方面，具有明顯的助益。

第二，我們以第 4 題與前測比較，這個稍顯困難的問題，由一開始 21 人答對，增加為 47 人，共增加了 26 位學生答對。並且，在分析後測答錯第 4 題的學生錯誤類型中，發現「指數相加後乘以 2 倍」錯誤類型的人數大幅降低為 17 人，共少了 19 人。這個部份或許是因為我們的課程設計中，特別增加了幫助學生比較與運算「連加」與「連乘」的指數問題。

(二)教學省思與未來展望

由上表二中，我們看到本次補救教學之課程內容設計與實施的結果是尚為滿意的。但在批改學生的評量單時，不難發現學生的另有概念(或迷思概念)是非常「堅固難改」的現象，如附件五所示。如同王全興(2010)引述學者的見解：迷思概念是根深蒂固的，難以透過傳統教學予以扭轉。據此，我們可能要嘗試發展更為有效的教學策略，例如運用異質合作學習、形成認知衝突、電腦模擬學習等，促使學生「調適」其原有概念，以建構正確的知識結構。

另外，兩次測驗中，「不合邏輯的指數運算或空白」的人數仍佔不少，足見一般的補救教學內容仍無法吸引這些「半放棄」狀態的學生。或許針對這些不得其門而入的學生來說，引起其學習動機、有趣或以遊戲融入教學、使用多媒體素材、使其能實際動手操作等的教學設計可能會更為恰當而有效。而這也是教學者所要面對的嚴肅課題之一。

教師的工作在於協助學生做有意義的學習(meanful learning)。本次研究中以分析學生在指數律問題上的表現為始，接以設計了補救教學學習單，最後分析與比較前後測的

結果。藉此，我們了解學生在習得指數律的過程中，內在概念的發展歷程。此次補救教學的實施，幫助了部份學生，有很好的改變；但我們也看到了部份學生對某些指數律概念的習得無效事實。這些都讓教師對於學生在指數律的學習上有更深入的了解。期望本篇初探研究能對一線數學教師有所助益，再深入地思考如何協助這些在指數律學習上遭遇困難的學生，更甚者，能在平日教學中。為之先做預防。

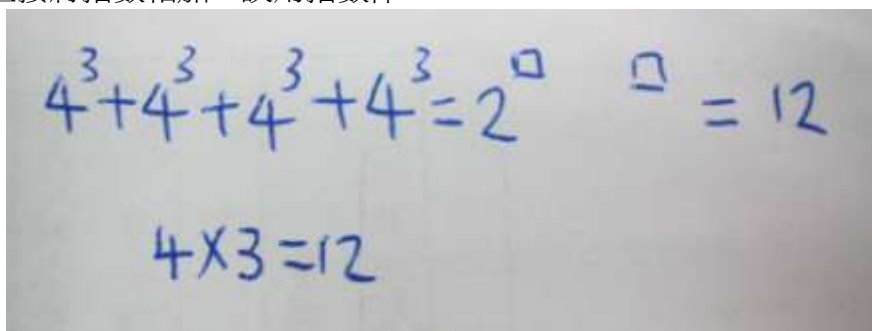
七、學習資源參考資料

- 王全興 (2010)。數學迷思概念的成因與解決策略。教師發展電子報，第 13 期。民 100 年 12 月 30 日，取自：<http://www2.inservice.edu.tw/EPaper/ep2/indexView.aspx?EID=387>
- 沈長榮 (2003)。高中對數單元錯誤類型分析之研究。國立高雄師範大學數學系碩士論文，未出版。
- 黃漢淳 (2001)。高中生指數概念及運算錯誤類型分析之研究。國立高雄師範大學數學系碩士論文，未出版。
- 陳怡如 (2007)。國二學生在多項式的乘除運算單元錯誤類型之分析研究。國立高雄師範大學數學系碩士論文，未出版。
- 郭侑玄 (2009)。高雄市地區高職生在指數單元錯誤類型之分析研究。國立高雄師範大學數學系碩士論文，未出版。
- 張嵐雄 (2010)。國中生在多項式乘除運算的主要錯誤類型及其補救教學之研究。國立臺灣師範大學數學系碩士論文，未出版。
- 張新仁 (2001)。實施補救教學之課程與教學設計。國立高雄師範大學教育學系教育學刊，17 期，85-106。

八、附件

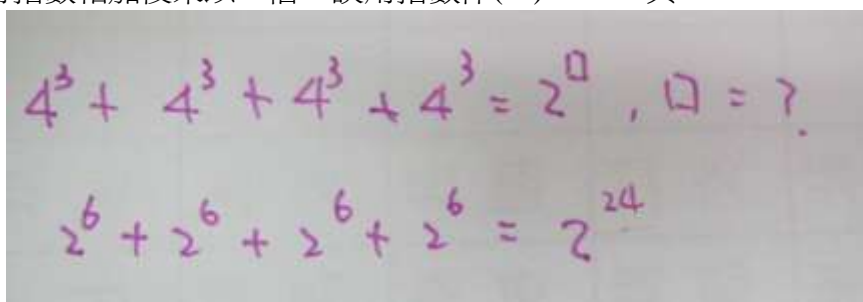
【附件一】學生在前測中的三種錯誤類型-照片摘要

錯誤類型 1：直接將指數相加：誤用指數律 $a^m \times a^n = a^{m+n}$

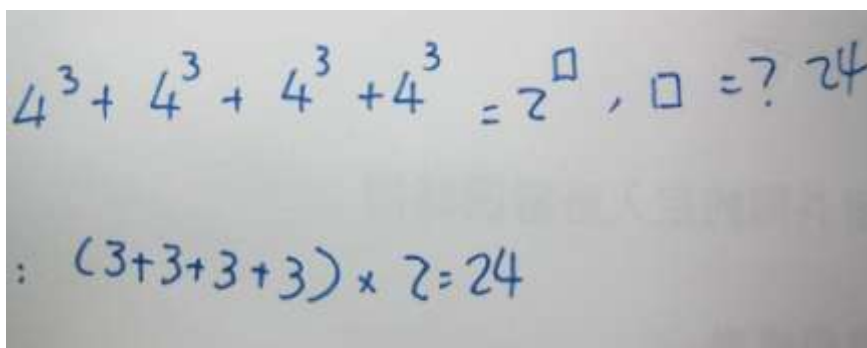


Handwritten student work showing the incorrect application of the law of exponents. The student writes: $4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 = 2^{\square}$ and $\square = 12$. Below this, they write $4 \times 3 = 12$, indicating they added the exponents and multiplied by the number of terms.

錯誤類型 2：將指數相加後乘以 2 倍：誤用指數律 $(a^m)^n = a^{m \times n}$ 與 $a^m \times a^n = a^{m+n}$

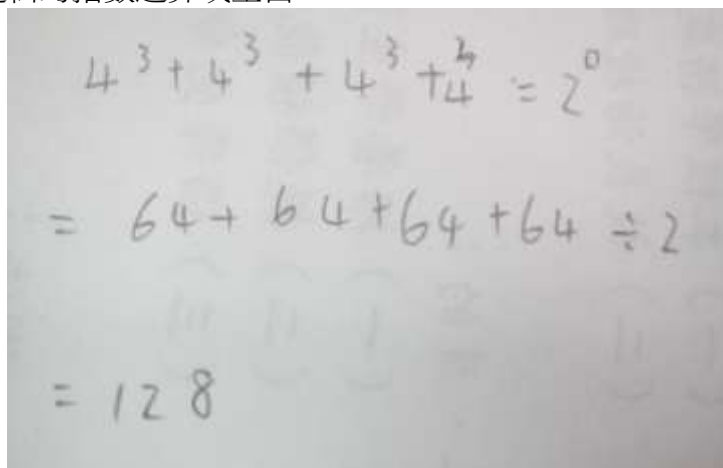


Handwritten student work for error type 2. The student writes: $4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 = 2^{\square}$, $\square = ?$. Below this, they write $2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6 = 2^{24}$, showing they added the exponents and then multiplied by 2.



Handwritten student work for error type 2. The student writes: $4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 = 2^{\square}$, $\square = ?$ 24. Below this, they write $(3+3+3+3) \times 2 = 24$, showing they added the exponents and then multiplied by 2.

錯誤類型 3：不合邏輯的指數運算或空白



Handwritten student work for error type 3. The student writes: $4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 = 2^{\square}$. Below this, they write $= 64 + 64 + 64 + 64 \div 2$. At the bottom, they write $= 128$, showing they added the terms and then divided by 2.

【附件二：學習單】第一頁(綠色部份為板書)

一、指數的意義

<p>(1) $2^{10} = 1024$ \uparrow $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$</p>	<p>(2) $3^5 =$ \uparrow $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$</p>
---	--

(3) $5^3 =$

(4) $4^3 =$

二、指數律 $a^m \times a^n = a^{m+n}$

<p>(1) $2^3 \times 2^2 = 2^{\square}$ \uparrow \uparrow $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$</p>	<p>(2) $3^5 \times 3^4 = 3^{\square}$ \uparrow \uparrow $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$</p>
--	--

(3) $3^3 \times 3^4 = 3^{\square}$

(4) $7^7 \times 7^2 = 7^{\square}$

(5) $13^3 \times 13^4 \times 13^2 = 13^{\square}$

(6) $5^3 \times 5 \times 5^4 = 5^{\square}$

三、指數律 $(a^m)^n = a^{m \times n}$

<p>(1) $(2^3)^4 = 2^{\square} = 2^{\square}$ \uparrow \uparrow $(2^3) \times (2^3) \times (2^3) \times (2^3)$ \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$</p>	<p>(2) $(5^2)^3 = 5^{\square} = 5^{\square}$ \uparrow \uparrow $(5^2) \times (5^2) \times (5^2)$ \uparrow \uparrow \uparrow $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$</p>
---	---

【附件二：學習單】第二頁(綠色部份為板書)

<p>(3) $9^4 = (3^{\square})^4 = 3^{\square}$</p> $\begin{array}{cccc} 9 & \times & 9 & \times & 9 & \times & 9 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 3^2 & \times & 3^2 & \times & 3^2 & \times & 3^2 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 3 \times 3 & \times & 3 \times 3 & \times & 3 \times 3 & \times & 3 \times 3 \end{array}$	<p>(4) $8^2 = (2^{\square})^2 = 2^{\square}$</p> $\begin{array}{cc} 8 & \times & 8 \\ \uparrow & & \uparrow \\ 2^3 & \times & 2^3 \\ \uparrow & & \uparrow \\ 2 \times 2 \times 2 & \times & 2 \times 2 \times 2 \end{array}$
--	--

(5) $(2^{\square})^2 = 2^{\square}$

(6) $(5^{\square})^2 = 5^{\square}$

(7) $8^4 = (2^{\square})^4 = 2^{\square}$

(8) $27^3 = (3^{\square})^3 = 3^{\square}$

(9) $25^4 = (5^{\square})^4 = 5^{\square}$

(10) $6^7 \times 6^3 = 6^{\square} = 2^{\square} \times 3^{\square}$

(11) $2^3 \times 8^4 = 2^3 \times 2^{\square} = 2^{\square}$

(12) $3^2 \times 9^3 = 3^2 \times 3^{\square} = 3^{\square}$

四、「連乘」和「連加」的不同

<p>(1) $2^3 \times 2^3 = 2^{\square}$</p> $\begin{array}{cc} 2^3 & \times & 2^3 \\ \uparrow & & \uparrow \\ 2 \times 2 \times 2 & \times & 2 \times 2 \times 2 \end{array}$	<p>(2) $2^3 + 2^3 = 2 \times 2^3 = 2^{\square}$</p> $\begin{array}{ccc} 2^3 & + & 2^3 \\ \uparrow & & \uparrow \\ 2 \times 2^3 & & \end{array}$
--	--

(2) $3^2 \times 3^2 \times 3^2 = 3^{\square}$

(4) $3^3 + 3^3 + 3^3 = \square \times 3^3 = 3^{\square}$

(5) $4^2 \times 4^2 \times 4^2 \times 4^2 = (2^{\square})^2 \times (2^{\square})^2 \times (2^{\square})^2 \times (2^{\square})^2 = 2^{\square}$ (6) $9^7 + 9^7 + 9^7 + 9^7 = 3^{\square} + 3^{\square} + 3^{\square} + 3^{\square} = \square \times 3^{\square} = 3^{\square}$

【附件三：評量單】

(1) $5^3 \times 5^4 = 5^\square$

(2) $125^3 = (\quad)^3 = 5^\square$

(3) $2^2 \times 8^3 = 2^2 \times 2^\square = 2^\square$

(4) $25^2 + 25^2 + 25^2 + 25^2 + 25^2 = 5^\square$

【附件四】學生學習單記錄—照片摘要

(6) $5^3 \times 5 \times 5^4 = 5^\square$

↓ ↘ ↙

$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

3個 1個 4個

(11) $2^3 \times 8^4 = 2^3 \times 2^\square = 2^\square$

↓ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙

$2 \times 2 \times 2$ $8 \times 8 \times 8 \times 8$

$2 \times 2 \times 2$ $2 \times 2 \times 2$ $2 \times 2 \times 2$ $2 \times 2 \times 2$

【附件五】學生在後測評量表現—照片摘要

下圖：雖然沒有分辨出「連加」和「連乘」的不同，但已有很好的指數律概念。

$$25^2 + 25^2 + 25^2 + 25^2 + 25^2 = 5^{20}$$

下圖：即使已經分辨出「連加」和「連乘」的不同，也寫出 5×5^4 ，但最後仍將 4 次方劃掉而改成 20 次方。可見學生的迷思概念根深蒂固，難以僅透過一次補救教學予以扭轉。

$$25^2 + 25^2 + 25^2 + 25^2 + 25^2 = 5^{20}$$