

簡單柱體的表面積計算

黎立夫 新竹縣國小數學輔導團/新竹縣六家國小

游欣婷 新竹縣國小數學輔導團/新竹市陽光國小

一、實施對象：六年級（一般班級 攜手課輔班級）

二、教學目標

主 題	<input type="checkbox"/> 數與計算 <input checked="" type="checkbox"/> 量與實測 <input type="checkbox"/> 幾何 <input type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率
相關分年細目(97)	能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。
教學目標	1.能透過簡單柱體展開圖，連結側面與底面的共用邊。 2.能將簡單柱體的面分為底面與側面兩個部分，並計算簡單柱體的表面積。

三、學習難點

■ 常見的教學困難或學生迷思概念：

認知方面，學生在計算形體表面積時，對於將立體圖形轉為平面或是平面轉為立體常有轉換上的困難，因此二維與三維的空間概念轉換的困難有時也會造成形體表面積的計算錯誤。

另外，在本單元柱體表面積的計算中，學生需要擺脫過去將各個面成組或單獨計算的方式，而需建立將形體表面積的側面看作為一完整的長方形並計算。但如何將各自分離的側面整合則是孩子在學習上所會遇到的困難。

四、補救教學內容處理：簡化 減量 分解 替代 重整

教學處理	內容說明
簡 化	
減 量	
分 解	將教學目標分解為幾個小目標進行教學 1.第一階段：將立體圖形拆解為較方便計算表面積的展開圖形。 2.第二階段：能將對應底面的邊與側面的邊，並瞭解其相關位置。 3.第三階段：除能計算底面面積外，並能將側面視作一完整長條狀的長方形，同時發現側面長方形的長為底面周長，寬則為柱高。 4.第四階段：能將所發現的原則運用在其他簡單柱體的表面積計算上。
替 代	
重 整	

五、教學規劃與實施

(一) 設計理念

數學課程中的表面積泛指立體形體所有表面面積的總合。在五年級的時候，學生就已學過立方體、長方體及由正方體、長方體所組合而成複合形體的表面積。以往學生的解題方法不外乎是將立體形體的面積以一組兩面為基準算出或個別計算後並進行加總。然而在教學過程中，老師常見學生的學習困難或迷思是學習成就落後的學生在計算形體表面積時，往往對於看不到的面常沒有真實感受，或是忽略它的存在，因而在解題時，常造成解題的缺漏。然而我們不禁要思考，為何會有這樣的情形發生？其實這有時必須導因於學生對於空間感覺混亂。以往立體形體傳達給我們的視覺表現是以立體影像呈現，但是在計算表面積時，學生卻需要將所看到的立體影像轉變成二維的平面然後思考並解題。對於學習低成就的學生來說，這樣的轉化是困難的。立體轉為平面，而平面又可組合成立體，如何讓自然的三維與二維轉換變得更加清楚，則是需要老師協助。

另外，在本單元表面積的計算中，學生需要建立將形體表面積的側面看作為一完整的長方形並計算。但如何將各自分離的側面整合則是孩子在學習上所會遇到的困難。因為這樣的運算方式，明顯與之前個別面積計算的方法有很大的差異，而對於二維與三維空間概念轉換已經不是很清楚的孩子來說，這樣的方式則又對他們增加了許多困難度，因此為了增進他們的理解，具體操作有其必要。

(二) 教學活動

主要問題與活動	說明與評量重點
<ul style="list-style-type: none"> ●請學生將拼板所組成的三角柱進行拆解形成展開圖。 ●請學生討論哪一種展開圖較方便計算表面積。 ●請學生將「把側面的三個長方形視為一個大的長方形的展開圖」重組為立體的三角柱，並且把側面和底面共用邊分別標記\cup、\cup、\cap，柱高則標記為\subset。 	<ul style="list-style-type: none"> ●學生可以將拼板進行各種方式拆解。 <ul style="list-style-type: none"> 方法一、以底面為中心，側面被拆解為三個長方形。 方法二、以側面為中心，側面被視為三個小長方形所組成的一個大長方形。 【評量重點】 <ul style="list-style-type: none"> 學生可以順利將立體形體拆解成展開圖即可。 ●學生可以就不同展開圖探討表面積計算的方便性。 【評量重點】 <ul style="list-style-type: none"> 學生可以發現將側面的三個長方形視為一個大的長方形時，展開圖表面積計算較為方便。 ●學生完成共用邊符號的標記。 【評量重點】 <ul style="list-style-type: none"> 學生可以完成共用邊符號的標記，並知道其中的對應關係。 ●學生觀察側面大長方形的長與底面周長的

主要問題與活動	說明與評量重點
<p>●請學生討論「展開圖中側面大長方形的長與底面每一段邊長的關係為何?」以及「展開圖中側面大長方形的寬與柱體的高關係為何?」</p> <p>●與學生共同整理三角柱的表面積為 底面積×2+側面長方形面積 而側面長方形的面積= $(\text{邊長}a+\text{邊長}b+\text{邊長}c)\times \text{邊}d$ → $\frac{\text{底面周長}}{\quad} \times \text{柱高}$</p> <p>●展示底面為梯形的四角柱的立體圖形及展開圖，要學生觀察並標示出展開圖中側面大長方形每一段長度與底面邊長對應關係。並標示出展開圖中側面大長方形的寬與柱體高的對應關係。</p>	<p>關係為何? 展開圖中側面大長方形的寬與柱體的高關係為何?</p> <p>【評量重點】 學生可以發現側面大長方形中每段長的總和就是底面圖形的周長，而大長方形的寬則與柱體的高相同。</p> <p>【評量重點】 學生可以理解表面積公式的意義</p> <p>●學生找出大長方形每一段長度、寬與柱體的對應關係。 【評量重點】 學生可以標示出每一段長度、寬與柱體的對應關係。</p>

六、學生表現與教學省思

在五年級的時候，學生便已學過如何計算正方體與長方體的表面積，不過當時孩子是奠基在長方體與正方體面的特性上，將表面積分別區分為上下、左右、前後三組的面，然後依據每組面兩兩相同的原理，各自算出一個面之後再乘以 2，最後再將三組面相加便得到最後的結果。然而，這樣的運算邏輯並無法運用在這個學期的表面積計算上。首先，這個單元要計算的形體為柱體，可能是底面為三角形的三角柱；或是底面為平行四邊形或梯形的四角柱；以及底面為圓形的圓柱，而由以上幾種形體堆疊出來的複合形體亦在其中。這些形體和舊經驗不同的地方在於，這些柱體的表面積不一定會像長方體或正方體一樣有一組相同的面，甚至有可能每個面都不一樣大，如底面為梯形的四角柱。

在這個單元的一開始，複習完舊經驗後，孩子發現這個單元柱體的表面積計算無法完全套用過去的經驗法則，因此很容易就會變成單面的面積計算再加總的解題方法。於是，柱體的表面積計算就變得瑣碎而繁複。而老師在這個單元的主要任務則是搭設一座橋樑，讓孩子跳脫個別而看到整體，將這些三角柱或是四角柱及圓柱能夠拆解為底面與側面的兩種組合再

進行運算。如何跨越這樣的概念而為孩子鋪路架橋呢?具體操作便是重要的功夫。

一開始請孩子將立體拼板拆解為展開圖時，可以發現孩子的拆法有許多種，但隨著老師給予的指令具體化——「為了使表面積的計算更加方便，我們要如何拆解才能使展開圖中的某些個別的面積組合成一個整體?」在經過嘗試之後，其實孩子不很費力的就能將展開圖的形式拆解為底面在上下，而側面連成一長條長方形的樣式。然而接下來的步驟以三角柱為例，老師在請孩子將三角柱的展開圖底面與側面個別的邊同時編號之時，其實當時孩子還搞不清楚編號的順序，因為當時他們並未將底面與側面共用的邊相連結，所以直覺的認為這些邊是不同的部分。但是當老師帶領他們觀看及說明後，孩子才理解底面與側面的邊是彼此共用，而將邊編號則可以將底面與側面相互連結起來。

之後老師透過展開圖引導孩子計算形體表面積時，孩子根據拆解經驗很容易就可以將展開圖分成底面與側面兩個部分。在計算時，然後孩子們答得很快，兩個底面一樣大，只要算出一個底面再乘以2。而側面的部分孩子因為已經看到一個長條狀的長方形，所以也馬上答出側面的算法是長方形的面積算法——長 \times 寬。當老師進一步詢問側面長方形的長是多少的時候，有些反應快的孩子馬上聯結到剛才所標邊的編號，所以馬上回答說是 \cup 、 \cup 、 \cup ，也有些孩子在聽到這個回答後，馬上確認自己手中的展開圖編號，發現的確是如此。老師這時候並沒有馬上確認這個答案，而是請每個孩子核對自己的展開圖，再進行確認，確定大家都沒有疑義後便緊接著下個步驟。側面長方形的長是 \cup 、 \cup 、 \cup 相加的結果，所以寫成算式的表示方式應該是什麼?孩子回答應該是 $\cup + \cup + \cup$ 。然而，邊 $\cup + \cup + \cup$ 代表著什麼?於是老師接著拋出下一個問題:「邊 \cup 、 \cup 、 \cup 在展開圖的什麼地方還可以看到?」孩子回答底面，而且剛好是三角形的底面的三條邊。老師就這個答案進一步追究，「三角形的三條邊，總結來說也就是三角形的什麼?」孩子馬上理解老師的問題，所以直接回答是三角形的周長。側面長方形的長就是底面三角形周長，這一點孩子已經發現到。可是側面長方形的寬呢?孩子回答是邊 \cup ，可是邊 \cup 在整個形體中又扮演什麼角色呢?為了使孩子有所發現，老師將手中的展開圖拼成立體三角柱，並提醒孩子一起動手做，同時觀察邊 \cup 的位置變化。透過反覆操作後，孩子先後說出「邊 \cup 是柱高!」這個回答。於是側面長方形的計算除了是長 \times 寬外，它與形體的連結更是底面周長 \times 柱高。

事實上光只有三角柱的練習還是不足以建立孩子對於形體表面積計算的規則，因此為了產生類推的原則以及加深孩子的印象，老師又將同樣的操作方式運用在底面為平行四邊形的四角柱上。再次操作的過程中，孩子明顯熟練許多，回答的速度也變快許多，不過老師還是很謹慎的帶著孩子重複每一個步驟及每一句問話，希望能讓孩子發現這些形體間共通的原則——側面長方形算法為底面周長 \times 柱高。在確認孩子對於形體的表面積計算已經可以拆解為底面 $\times 2$ 及側面算法為底面周長 \times 柱高後。接下來底面為梯形的四角柱老師則採不同的操作方法，除了檢驗孩子是否真的理解側面長方形算法外，也將一開始將邊編號的方式反向操作，確認孩子是否能將側面的邊長與底面邊長做有效連結，這對於孩子以後遇到展開圖，但卻要計算表面積，但邊的資訊不齊全的題型有很大的幫助。在黑板上彼此對應的展開圖及立體圖形，這次不再是具體操作，而採用「紙上談兵」的策略進行：由老師在黑板繪出立體圖形及展開圖，並請孩子觀察並標示出展開圖中側面大長方形每一段長度與底面邊長對應關係。以確認孩子平面轉立體或是立體轉平面的空間概念是否清楚，之後再請孩子將底面為梯形的四角柱的表面積計算出來。

這次教學活動的設計主要是希望能讓孩子用將形體表面積區分為底面及側面各自兩個整

體來計算，而非是以往土法煉鋼式的每面單獨計算。然而新的方式的困難點在於如何將立體圖形的側面連結之後看作是一整體的大長方形。課本的方法是將每個側面編號，這個方法對於計算側面長方形的面積，並無法幫助學生思考。其原因在於，計算面積仰賴的是「邊長」，而將面編號並無法增進學生計算的理解。因此在筆者所進行的教學策略中，則是透過具體操作，企圖為孩子搭一座橋樑，就是將側面的邊與底面的邊相互產生連結，連結一旦建立，側面長方形的計算就能透過邊長的關係迎刃而解。而前面三角柱及四角柱的步驟雖然進行得有些緩慢，但是只要原則一旦建立，就能應用一輩子，哪怕是簡單形體所堆疊出來的複合形體也一樣適用。

七、學習資源參考資料

康軒版，數學六下第十二冊課本

康軒版，數學六下第十二冊教學指引

八、附件

