

帶分數乘以整數

吳茵慧 臺中市國小數學輔導團/臺中市沙鹿國小

一、實施對象：五年級（一般班級 攜手課輔班級）

二、教學目標

主 題	<input checked="" type="checkbox"/> 數與計算 <input type="checkbox"/> 量與實測 <input type="checkbox"/> 幾何 <input type="checkbox"/> 代數 <input type="checkbox"/> 統計與機率
相關分年細目(97)	5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。
教學目標	1.理解帶分數乘以整數的意義及計算方式。 2.解決帶分數乘以整數的文字題。

三、學習難點

兩位個案學生在班上的學業表現低落，一位在上學期提交特教鑑定後為學習障礙，另一位雖非學習障礙，但自國小一年級起就一直是學習低成就的學生（與其家庭背景有關）。兩位個案學生在進行帶分數乘以整數時分別出現：(A) 只有分子乘以倍數，如： $1\frac{3}{4} \times 5 = 1\frac{15}{4}$ ；(B) 整數、分子和分母全部乘以倍數，如： $1\frac{3}{4} \times 5 = 5\frac{15}{20}$ 。學生在進入「分數乘法」單元的學習之前，已在四年級學習過假分數和帶分數的互換及真（假）分數整數倍、五年級上學期時學過分數的擴分。教學者原試圖以同分母分數的加法引導解題：

教學者：我們來看看這個題目要怎麼列算式（一條緞帶長 $1\frac{3}{4}$ 公尺，5 條緞帶共多長？）。

學生 A： $1\frac{3}{4} \times 5$ 。

教學者：為什麼？

學生 A：因為知道 1 條，要算 5 條要用乘的。

教學者：（問學生 B）你知道他的意思嗎？

（學生 B 其實不太確定，但還是點點頭）

學生 A：就是要算 5 個緞帶有多少，就是算 5 個 $1\frac{3}{4}$ 公尺。

教學者：如果用加法的話要怎麼算？

學生 A：就加 5 次。

教學者：所以 $1\frac{3}{4}$ 連加 5 次，答案會跟 $1\frac{3}{4} \times 5$ 一樣嗎？

學生 A：對。

（教學者請學生 A、B 計算 $1\frac{3}{4} + 1\frac{3}{4} + 1\frac{3}{4} + 1\frac{3}{4} + 1\frac{3}{4}$ ）

學生 A 的紀錄： $1\frac{3}{4} + 1\frac{3}{4} + 1\frac{3}{4} + 1\frac{3}{4} + 1\frac{3}{4} = 5\frac{15}{4} = 8\frac{3}{4}$

學生 B 的紀錄： $1\frac{3}{4} + 1\frac{3}{4} + 1\frac{3}{4} + 1\frac{3}{4} + 1\frac{3}{4} = 5\frac{15}{20}$

教學者：你們覺得誰的答案是對的？

（學生 A、B 均比向學生 B 的答案）

教學者：為什麼？

學生 A：因為他兩次算的都一樣。

學生 A 在用加法解題時，雖然計算正確，但他對於自己並不太有信心、概念上也不太清楚，加上又看到學生 B 兩次答案都相同，一時誤以為「 $5\frac{15}{20}$ 」才是正確答案。兩名學生在分數的認知概念上，明顯的對於分數單位量的概念模糊、不理解，以致計算時忽略單位量，以整數的算則類推至分數的運算。

四、補救教學內容處理：■簡化 □減量 ■分解 ■替代 □重整

教學處理	內容說明
簡化	1.分母及乘數 ≤ 10 。
減量	/
分解	1.能理解題意，並以畫圖方式解題。 2.能理解題意，並以算式記錄。 3.對照圖像表徵與算式紀錄後，能整理出計算規則。 4.能理解題意，並依乘法算式解題。
替代	1.以圖像表徵取代運算規則說明
重整	/

五、教學規劃與實施

(一) 設計理念

在分數乘法上，課程、教材與教學常見有一些阻礙學生概念發展的做法，例如：過於重視直接公式的教導、欠缺表徵的多元性等（劉祥通、周立勳，2001）。學生在複習真（假）分數乘以整數時，教學者問：「為什麼這麼算？」學生回答：「以前老師就這樣教：只要分子跟整數乘起來就好。」對學生來說只是數字符號的操弄，對分數的意義或是題目的意思卻是不求甚解。因此此次活動設計先複習真、假分數乘以整數的部分（答案包含真分數與帶分數），再進入到帶分數乘以整數；主要著重在以圖像表徵呈現的部分，並在對照圖像表徵與算式紀錄後，能整理出計算規則。希望藉此澄清學生的迷思概念，並提升對於分數概念的理解。

(二) 教學活動

主要問題與活動	說明與評量重點
<p>※真分數乘以整數</p> <ul style="list-style-type: none"> ◆小芳每天都吃$\frac{1}{4}$個蛋糕，3天吃了多少個蛋糕？ ◆小強和2個好朋友，每人各吃$\frac{2}{8}$個披薩，他們3人一共吃了多少個披薩？ ◆小偉每天早上都會吃$\frac{1}{5}$片的蔥油餅，5天共吃了多少片的蔥油餅？ ◆美勞課做剪貼時，每組需要$\frac{3}{5}$包的色紙，2組一共需要多少包色紙？ 	<ul style="list-style-type: none"> ◆學生能以畫圖方式表徵問題，再由教師引導以算式記錄。由圖中獲得答案後，再將結果記錄於等號之後。 ◆所得結果為假分數時，能化為帶分數。

主要問題與活動	說明與評量重點
<ul style="list-style-type: none"> ◆我們來看看這四個（真分數乘以整數）算式，有什麼一樣的地方？ ◆為什麼分母不用乘以整數？ 	<ul style="list-style-type: none"> ◆能察覺答案的分母與題目中被乘數分母相同，或只有分子和整數相乘；如無法察覺，由教學者提示之。 ◆這個部分學生也許不易詳細回答，教學者應以圖像表徵引導學生去看見：是（？個單位分數）乘以整數，所以是（？個乘以整數）的單位分數，如：$\frac{3}{5} \times 2$，是（3個$\frac{1}{5}$）$\times 2$，也就是有（$3 \times 2 =$）6個$\frac{1}{5}$。
<p>※假分數乘以整數</p> <ul style="list-style-type: none"> ◆一瓶沙拉油有$\frac{6}{5}$公升，好好吃餐廳這個月用了2瓶，一共用了多少公升的沙拉油？ ◆一盒雞蛋有10個。做一個蛋糕要用$\frac{16}{5}$盒雞蛋，做3個蛋糕要用多少盒雞蛋？ ◆我們來看看這兩個（假分數乘以整數）算式，有什麼一樣的地方？ ◆這兩個算式的分母也沒有乘以整數，為什麼？ 	<ul style="list-style-type: none"> ◆學生能以畫圖方式表徵問題，再由教師引導以算式記錄。由圖中獲得答案後，再將結果記錄於等號之後。 ◆能將所得結果化為帶分數。 ◆能察覺答案的分母與題目中被乘數分母相同；如無法察覺，由教學者提示之。 ◆如學生仍無法表達清楚，教學者一樣以圖像表徵引導學生了解：真、假分數乘以整數時，只要分子乘以整數，而分母不變。
<p>※帶分數乘以整數</p> <ul style="list-style-type: none"> ◆一瓶汽水有$1\frac{1}{5}$公升，3瓶汽水共有多少公升？ ◆「1」的部分要等分成多少份？所以「$1\frac{1}{5}$」就是幾個$\frac{1}{5}$？ ◆一條緞帶長$1\frac{1}{2}$公尺，5條緞帶長多少公尺？ ◆「1」的部分要等分成多少份？所以「$1\frac{1}{2}$」就是幾個$\frac{1}{2}$？ ◆我們來看看這兩個（帶分數乘以整數）算式跟前面的算式有哪些一樣的地方？ ◆有一塊長方形花園的長是$1\frac{2}{3}$公尺，寬是4公尺，面積是多少平方公尺？ 	<ul style="list-style-type: none"> ◆學生能以畫圖方式表徵問題，再由教師引導以算式記錄。由圖中獲得答案後，再將結果記錄於等號之後。 ◆學生在畫「$1\frac{1}{5}$」時，如「1」的部分未等分為5份，教學者需追問，使學生將「1」等分為5份，能夠知道$1\frac{1}{5} = \frac{6}{5}$，$1\frac{1}{5} \times 3 = \frac{6}{5} \times 3$；目的在引導學生將帶分數乘以整數的學習與假分數乘以整數的部分產生學習遷移。 ◆能將所得結果化為帶分數。 ◆$1\frac{1}{2} \times 5 = \frac{3}{2} \times 5 = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$。 ◆學生能察覺帶分數乘以整數的計算方式，就是化成假分數再乘以整數，只要分子乘以整數、分母不變。 ◆能知道長方形面積＝長\times寬 ◆請學生列出算式、直接做計算。

主要問題與活動	說明與評量重點
<ul style="list-style-type: none"> ◆小雯每天繞著公園慢跑 5 圈，繞公園一圈是 $2\frac{3}{4}$ 公里，小雯每天慢跑多少公里？ ◆每袋黃豆重 $3\frac{2}{7}$ 公斤，雜貨店進了 4 袋，共有多少公斤的黃豆？ 	<ul style="list-style-type: none"> ◆能依據題意列出算式，並據以解題。 ◆能依據題意列出算式，並據以解題。

六、學生表現與教學省思

(一) 學生表現

兩位個案學生在複習真分數乘以整數、以圖像表徵題意時，都能正確畫出，並依據題意列出算式，且根據圖像表徵的結果得到答案並予以記錄。教學者請他們觀察算式相同之處時，兩位學生都能看出只有分子乘以整數，但分母不變；教學者進一步追問原因，學生卻答不上來。於是教學者帶著他們觀察自己畫的圖並加以說明後，學生雖表示了解，但仍需在往後的教學中確認。

接下來複習假分數乘以整數，教學者仍請學生以圖像表徵題意，但首先遇到其中一位學生不知道該怎麼畫出假分數。於是教學者引導學生（以 $\frac{6}{5}$ 為例）：

1. 分母的「5」是什麼意思？（一整個東西等分成 5 份）

（教學者畫一個長方形，並等分成 5 份）

2. 所以 1 份是？（是 $\frac{1}{5}$ ）

3. 那「 $\frac{6}{5}$ 」是幾個 $\frac{1}{5}$ ？（6 個）

（學生：可是老師你畫的這個只有 5 個 $\frac{1}{5}$ 。）

4. 還少 1 個 $\frac{1}{5}$ 怎麼辦？（再畫一個？）

5. 請學生自己再畫一個長方形，同時提醒他：因為是 $\frac{1}{5}$ ，所以別忘了也要等分成 5 份。

後來進到下一題要畫「 $\frac{10}{10}$ 」時，雖然他是先畫出一個長方形、等分成 10 份，數一數有 10 個 $\frac{1}{10}$ ，發現還要再畫一個等分成 10 份的長方形、取其中 2 個；雖然畫得慢，但學生已有概念並能正確畫出。在複習完假分數乘以整數，教學者仍請學生說說：為什麼只有分子乘以整數，但分母不變？這次是一人說明一題，學生均能以自己畫的圖為例，正確的說明。

學生以圖像表徵帶分數並沒有問題，不過學生在畫「 $1\frac{1}{5}$ 」時，「1」的部分未等分為 5 份，教學者進一步追問並要求學生將「1」等分為 5 份，確定學生知道 $1\frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ ， $1\frac{1}{5} \times 3 = \frac{6}{5} \times 3$ ；引導學生對照帶分數乘以整數與之前假分數乘以整數的計算方式。學生很快就發現：只要將帶分數化成假分數，就跟前面（真、假分數乘以整數）的計算方式是一樣的。最後三道情境題，教學者請學生不必再畫圖，兩位學生也都順利的完成解題。

(二) 教學省思

帶分數乘以整數可以有兩種計算方式：1. 將帶分數化為假分數之後再乘以整數；2. 將帶分數分成整數和真分數、再乘以整數。大部分的孩子在透過圖像表徵的對照後，能夠理解第 2 種方式，而教學者之所以引導學生將帶分數化為假分數之後再乘以乘數，一方面是要讓學生將帶分數乘以整數的學習與假分數乘以整數的部分產生學習遷移，再者則是讓學生在進入到分數乘以分數的學習時，不致於產生錯亂而認為帶分數乘以整數的計算和分數乘以分數的計

算方式不同。帶分數乘以整數的兩種計算方式思考點確實不同，但有學習困難的學生在理解力部分本就較弱，教學者應使學習單純化，逐步提升學生的理解力。

七、學習資源參考資料

康軒文教事業（2010）。國小數學教師手冊第七冊（4上）。台北市：康軒文教事業。
康軒文教事業（2012）。國小數學教師手冊第十冊（5下）。台北市：康軒文教事業。
劉祥通、周立勳（2001）。發展國小數學教師教學之佈題能力－以分數乘除法教學為例。科學教育學刊第九卷第一期，p15－34。

八、附件

（一）學習單

◎小芳每天都吃 $\frac{1}{4}$ 個蛋糕，3天吃了多少個蛋糕？

◎小強和2個好朋友，每人各吃 $\frac{2}{8}$ 個披薩，他們3人一共吃了多少個披薩？

◎小偉每天早上都會吃 $\frac{1}{3}$ 片的蔥油餅，5天共吃了多少片的蔥油餅？

◎美勞課做剪貼時，每組需要 $\frac{3}{5}$ 包的色紙，2組一共需要多少包色紙？

◎一瓶沙拉油有 $\frac{6}{5}$ 公升，好好吃餐廳這個月用了2瓶，一共用了多少公升的沙拉油？

◎一盒雞蛋有10個。做一個蛋糕要用 $\frac{10}{6}$ 盒雞蛋，做3個蛋糕要用多少盒雞蛋？

◎一瓶汽水有 $1\frac{1}{3}$ 公升，3 瓶汽水共有多少公升？

◎一條緞帶長 $1\frac{1}{2}$ 公尺，5 條緞帶長多少公尺？

◎有一塊長方形花園的長是 $1\frac{2}{3}$ 公尺，寬是 4 公尺，面積是多少平方公尺？

◎小雯每天繞著公園慢跑 5 圈，繞公園一圈是 $2\frac{3}{4}$ 公里，小雯每天慢跑多少公里？

◎每袋黃豆重 $3\frac{2}{7}$ 公斤，雜貨店進了 4 袋，共有多少公斤的黃豆？

(二) 學生解題照片

◎小芳每天吃 $\frac{3}{4}$ 個蛋糕，3天吃了多少個蛋糕？
 $\frac{3}{4} \times 3 = \frac{9}{4}$
 A: $\frac{9}{4}$ 個

◎小傑和2個好朋友，每人各吃 $\frac{2}{3}$ 個披薩，他們3人一共吃了多少個披薩？
 $1+2=3$
 $\frac{2}{3} \times 3 = \frac{6}{3} = 2$
 A: 2個

◎小俊每天早上都會吃 $\frac{1}{3}$ 片的蔥油餅，5天共吃了多少片的蔥油餅？
 $\frac{1}{3} \times 5 = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$
 A: $1\frac{2}{3}$ 片

◎美芳課後剪紙時，每組需要 $\frac{2}{3}$ 包的色紙，2組一共需要多少包色紙？
 $\frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$
 A: $1\frac{1}{3}$ 包

◎小偉每天早上都會吃 $\frac{1}{3}$ 片的蔥油餅，5天共吃了多少片的蔥油餅？
 $\frac{1}{3} \times 5 = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$
 A: $1\frac{2}{3}$ 個

◎美芳課後剪紙時，每組需要 $\frac{2}{3}$ 包的色紙，2組一共需要多少包色紙？
 $\frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$
 A: $1\frac{1}{3}$ 包

◎一瓶沙拉油有 $\frac{6}{5}$ 公升，好好吃餐廳這個月用了2瓶，一共用了多少公升的沙拉油？
 $\frac{6}{5} \times 2 = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$
 A: $2\frac{2}{5}$ 公升

◎一瓶汽水有 $\frac{1}{5}$ 公升，3瓶汽水共有多少公升？
 $\frac{1}{5} \times 3 = \frac{3}{5}$
 $= \frac{6}{5} \times 3 = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$
 A: $3\frac{3}{5}$ 公升

◎一條鐵帶長 $\frac{1}{3}$ 公尺，5條鐵帶長多少公尺？
 $\frac{1}{3} \times 5 = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$
 A: $1\frac{2}{3}$ 公尺

◎有一塊長方形花園的長是 $\frac{10}{3}$ 公尺，寬是 $\frac{4}{3}$ 公尺，面積是多少平方公尺？
 $\frac{10}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}$
 A: $4\frac{4}{9} m^2$

◎小傑每天騎著 $\frac{1}{3}$ 圈得跑4圈，繞公園一圈是 $\frac{1}{3}$ 公里，小傑每天慢跑多少公里？
 $\frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$
 A: $1\frac{1}{3}$ 公里

◎美芳課後剪紙時，每組需要 $\frac{2}{3}$ 包的色紙，2組一共需要多少包色紙？
 $\frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$
 A: $1\frac{1}{3}$ 包

◎一瓶沙拉油有 $\frac{6}{5}$ 公升，好好吃餐廳這個月用了2瓶，一共用了多少公升的沙拉油？
 $\frac{6}{5} \times 2 = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$
 A: $2\frac{2}{5}$ 公升

◎一盒雞蛋有10個，做一個蛋糕要用 $\frac{1}{3}$ 盒雞蛋，做3個蛋糕要用多少盒雞蛋？
 $\frac{1}{3} \times 3 = 1$
 A: 1盒