



局長序

臺北市國民小學基本學力檢測工作始於 94 年度，其目的為了解臺北市國民小學學生學習成就趨勢，於每年 10 月份舉行全市六年級學生基本學力檢測。自 95 年度起除續辦國語文基本學力檢測，另增加辦理數學基本學力檢測，並訂定計畫推動本項工作，以每年辦理一次為原則。97 年度市長於學習檢測結果簡報後裁示，自 98 年度起增加英語學力檢測迄今，本檢測結果除能協助掌握學生學習成就趨勢外，亦可提供教師教學回饋及本局訂定教育政策之參考，102 年度亦將學力檢測對象由原本六年級調至五年級，以聚焦學生學習成就，評量學生學習瓶頸，俾進行補救教學。

臺北市國民小學基本學力檢測工作，依據臺北市國民小學精進教學評量改進組年度計畫，由本局策劃，分設綜合規劃小組、國語文學科小組、數學學科小組、英語學科小組及學習諮詢小組，其中數學學科小組委託臺北市國語實驗國民小學（臺北市國民教育輔導團國小數學領域輔導小組）辦理，執行的內容包括試題命題、審題及測後的學科內容解釋。此外，為探究學生數學解題思維，自 96 年度起增加建構反應題的評量試題，希望應用建構反應題的解題分析，藉以整合學生數學基本概念，提升數學解題能力，也可瞭解學生解題的思考歷程，適時指導學生的數學表達能力，建構反應題採抽測方式，每班抽測 1 人，全市約抽測 800 人。

欣聞該輔導小組將各年度建構反應題分析成果集結彙整成冊，本人特別要感謝國小數學輔導小組長期的努力、感謝長期參與基本學力檢測工作的指導教授、校長、主任及老師們，因為大家的奉獻，為臺北市國小數學教學的推動與教學輔導工作邁向顛峰、開創輝煌的一頁。。

臺北市政府教育局局長  謹識

中華民國 103 年 5 月



編者序

臺北市國民教育輔導團國小數學學習領域輔導小組長期以來即致力於數學課程、教學與評量的研究發展，經常關心國際數學教育發展的趨勢、掌握數學教育的脈動，積極參與數學領域教材研發與教學評量各項工作、鑽研兒童數學學習認知發展、探索學生數學迷思概念與教學策略、精進於數學創新教學，並從事數學行動研究。除了增進輔導員本身數學教學專業知能，也為提升本市國小教師數學領域本職學能與教學知能而努力。

本小組自 95 年度起接受臺北市政府教育局指導，辦理國小數學領域基本學力檢測，於每年 10 月份舉行全市六年級學生基本學力檢測，以了解臺北市學生之學習趨勢，執行的內容包括試題命題、審題及測後的學科內容分析、解釋。此外，為探究學生數學解題思維，自 96 年度起增加建構反應題的評量試題，希望應用建構反應題的解題分析，藉以整合學生數學基本概念，提升數學解題能力，也可瞭解學生解題的思考歷程，適時指導學生的數學表達能力。

本小組前於 100 年 7 月即略已整理自 96 年度至 99 年度臺北市國民小學基本學力檢測有關建構反應題的評量資料及學生解題類型成輯，廣受各縣市數學輔導團喜愛及運用，並進一步進行相關行動研究及教學實驗，崑此，本小組本年度再增加 100 年度、101 年度及 102 年度建構反應題的試題，總計 7 個年度共計數與量主題 25 題、幾何主題 16 題、代數主題 8 題以及統計主題 1 題等 50 題，每題建構反應題均由本小組進行評閱、分析及結果報告的初擬，並於每年度的成果報告書中以專章報告，其內容包括評閱結果分析、學生解題類型分析（包括解題類型舉隅和錯誤分析）以及教學建議等。

茲將此 96 年度至 102 年度建構反應題分析成果集結彙整，尚祈各界教育先進不吝指教。本書付梓之際，特別感謝基本學力檢測數學小組指導教授楊瑞智教授、鍾靜教授傾心指導以及前團長戴寶蓮校長陪伴與協助，並感謝所有熱心服務、貢獻專長的輔導員伙伴們，也向所有堅守數學輔導教育工作、無私奉獻的教育伙伴致上最高的敬意。

主任輔導員 楊美伶謹識

中華民國 103 年 5 月



學生數學解題思維探究—建構反應題解題分析（上）

目 錄

壹、建構反應題的緣起與目的	1
貳、建構反應題的命題及評閱歷程	1
參、建構反應題的命題架構	3
肆、建構反應試題使用建議	6
伍、96-102 年度建構反應試題檢測結果分析與教學建議	9
一、整數	9
(一) 四則混合計算	9
(二) 四則混合的應用	16
(三) 兩步驟四則混合算式的擬題	24
(四) 倍數的應用	33
(五) 四捨五入概數取法	40
(六) 理解整數四則混合計算	47
(七) 理解整數除法直式計算	53
(八) 推理兩步驟計算解題	58
二、分數	64
(一) 表徵假分數的意義	64
(二) 在數線上標記分數	70
(三) 表徵分數之整數相除的意義	81
(四) 由部分推估全體量	91
(五) 異分母分數的大小比較	97
(六) 表徵假分數	104
(七) 將分數正確標記在數線上	111
(八) 表達等值分數的意義	117
三、小數	129
(一) 用圖示表徵純小數乘法的意義	129
(二) 小數的加法計算	133
(三) 將小數正確標記在數線上	137
(四) 在圖形上表徵小數	141
四、比率—理解折扣的意義	154
五、因數與倍數—理解公倍數的意義	160
六、容量—容積和體積的應用	166
七、重量—公噸、公斤的化聚與估計	175
八、角度	182
(一) 使用量角器實測與畫角	182
(二) 畫出一個指定的度數	186

圖目錄

圖 1-1	建構反應題命題、審題暨評閱流程.....	2
圖 2-1-1	97 年度數學學力檢測建構反應題第一題得分統計圖.....	10
圖 2-1-2	97 年度數學學力檢測建構反應題第五題得分統計圖.....	17
圖 2-1-3	98 年度數學學力檢測建構反應題第三題得分統計圖.....	25
圖 2-1-4	96 年度數學學力檢測建構反應題第四題得分統計圖.....	34
圖 2-1-5	98 年度數學學力檢測建構反應題第五題得分統計圖.....	41
圖 2-1-6	100 年度數學學力檢測建構反應題第三題得分統計圖.....	48
圖 2-1-7	101 年度數學學力檢測建構反應題第一題得分統計圖.....	54
圖 2-1-7	102 年度數學學力檢測建構反應題第三題得分統計圖.....	59
圖 2-2-1	96 年度數學學力檢測建構反應題第一題得分統計圖.....	65
圖 2-2-2	97 年度數學學力檢測建構反應題第四題 A 點得分統計圖.....	71
圖 2-2-3	97 年度數學學力檢測建構反應題第四題 B 點得分統計圖.....	73
圖 2-2-4	98 年度數學學力檢測建構反應題第四題得分統計圖.....	82
圖 2-2-5	99 年度數學學力檢測建構反應題第一題得分統計圖.....	92
圖 2-2-6	99 年度數學學力檢測建構反應題第三題得分統計圖.....	98
圖 2-2-7	101 年度數學學力檢測建構反應題第二題得分統計圖.....	105
圖 2-2-8	101 年度數學學力檢測建構反應題第 3-2 題得分統計圖.....	112
圖 2-2-9	102 年度數學學力檢測建構反應題第 2-1-①題得分統計圖.....	119
圖 2-2-10	102 年度數學學力檢測建構反應題第 2-1-②題得分統計圖.....	123
圖 2-2-11	102 年度數學學力檢測建構反應題第 2-2 題得分統計圖.....	123
圖 2-3-1	99 年度數學學力檢測建構反應題第二題得分統計圖.....	130
圖 2-3-2	100 年度數學學力檢測建構反應題第 3-1 題得分統計圖.....	134
圖 2-3-3	101 年度數學學力檢測建構反應題第 3-1 題得分統計圖.....	138
圖 2-3-4	102 年度數學學力檢測建構反應題第 1-1 題得分統計圖.....	143
圖 2-4-1	101 年度數學學力檢測建構反應題第四題得分統計圖.....	155
圖 2-5-1	100 年度數學學力檢測建構反應題第二題得分統計圖.....	161
圖 2-6-1	100 年度數學學力檢測建構反應題第六題得分統計圖.....	168
圖 2-7-1	96 年度數學學力檢測建構反應題第二題得分統計圖.....	176
圖 2-8-1	98 年度數學學力檢測建構反應題第一題得分統計圖.....	183
圖 2-8-2	99 年度數學學力檢測建構反應題第四題得分統計圖.....	187



表目錄

表 1-1	知識向度說明表	3
表 1-2	應用向度說明表	4
表 1-3	推理向度說明表	5
表 2-1-1	97 年度數學建構反應題第一題評閱標準	9
表 2-1-2	97 年度數學建構反應題第一題評閱結果統計表	9
表 2-1-3	97 年度數學建構反應題第一題學生解題類型分析	10
表 2-1-4	97 年度數學建構反應題第五題評閱標準	16
表 2-1-5	97 年度數學建構反應題第五題評閱結果統計表	17
表 2-1-6	97 年度數學建構反應題第五題學生解題類型分析	18
表 2-1-7	98 年度數學學力檢測建構反應題第三題評閱標準	24
表 2-1-8	98 年度數學學力檢測建構反應題第三題評閱結果統計表	25
表 2-1-9	98 年度數學學力檢測建構反應題第三題學生解題類型分析	26
表 2-1-10	96 年度數學學力檢測建構反應題第四題評閱標準	33
表 2-1-11	96 年度數學學力檢測建構反應題第四題評閱結果統計表	33
表 2-1-12	96 年度數學學力檢測建構反應題第四題學生解題類型分析	34
表 2-1-13	98 年度數學學力檢測建構反應題第五題評閱標準	40
表 2-1-14	98 年度數學學力檢測建構反應題第五題評閱結果統計表	40
表 2-1-15	98 年度數學學力檢測建構反應題第五題學生解題類型分析	41
表 2-1-16	100 年度數學學力檢測建構反應題第三題評閱標準	47
表 2-1-17	100 年度數學學力檢測建構反應題第三題評閱結果統計表	47
表 2-1-19	101 年度數學學力檢測建構反應題第一題評閱標準	53
表 2-1-20	101 年度數學學力檢測建構反應題第一題評閱結果統計表	54
表 2-1-21	101 年度數學學力檢測建構反應題第一題學生解題類型分析	55
表 2-1-22	102 年度數學學力檢測建構反應題第三題評閱標準	58
表 2-1-23	102 年度數學學力檢測建構反應題第三題評閱結果統計表	59
表 2-1-24	102 年度數學學力檢測建構反應題第三題學生解題類型分析	60
表 2-2-1	96 年度數學學力檢測建構反應題第一題評閱標準	64
表 2-2-2	96 年度數學學力檢測建構反應題第一題評閱結果統計表	65
表 2-2-3	96 年度數學學力檢測建構反應題第一題學生解題類型分析	66
表 2-2-4	97 年度數學學力檢測建構反應題第四題評閱標準	70
表 2-2-5	97 年度數學學力檢測建構反應題第四題 A 點評閱結果統計表	71
表 2-2-6	97 年度數學學力檢測建構反應題第四題 B 點評閱結果統計表	72
表 2-2-7	97 年度數學學力檢測建構反應題第四題學生解題類型分析	74
表 2-2-8	98 年度數學學力檢測建構反應題第四題評閱標準	81
表 2-2-9	98 年度數學學力檢測建構反應題第四題評閱結果統計表	82
表 2-2-10	98 年度數學學力檢測建構反應題第四題學生解題類型分析	83
表 2-2-11	99 年度數學學力檢測建構反應題第一題評閱標準	91
表 2-2-12	99 年度數學學力檢測建構反應題第一題評閱結果統計表	92

表 2-2-13	99 年度數學學力檢測建構反應題第一題學生解題類型分析.....	93
表 2-2-14	99 年度數學學力檢測建構反應題第三題評閱標準.....	97
表 2-2-15	99 年度數學學力檢測建構反應題第三題評閱結果統計表.....	97
表 2-2-16	99 年度數學學力檢測建構反應題第三題學生解題類型分析.....	99
表 2-2-17	101 年度數學學力檢測建構反應題第二題評閱標準.....	104
表 2-2-18	101 年度數學學力檢測建構反應題第二題評閱結果統計表.....	105
表 2-2-19	101 年度數學學力檢測建構反應題第二題學生解題類型分析.....	106
表 2-2-20	101 年度數學學力檢測建構反應題第 3-2 題評閱標準.....	111
表 2-2-21	101 年度數學學力檢測建構反應題第 3-2 題評閱結果統計表.....	112
表 2-2-22	101 年度數學學力檢測建構反應題第 3-2 題學生解題類型分析.....	113
表 2-2-23	102 年度數學學力檢測建構反應題第 2-1-①題評閱標準.....	117
表 2-2-24	102 年度數學學力檢測建構反應題第 2-1-②題評閱標準.....	118
表 2-2-25	102 年度數學學力檢測建構反應題第 2-2 題評閱標準.....	118
表 2-2-26	102 年度數學學力檢測建構反應題第 2-1-①題評閱結果統計表.....	119
表 2-2-27	102 年度數學學力檢測建構反應題第 2-1-①題學生解題類型分析.....	120
表 2-2-28	102 年度數學學力檢測建構反應題第 2-1-②題評閱結果統計表.....	122
表 2-2-29	102 年度數學學力檢測建構反應題第 2-1-②題學生解題類型分析.....	123
表 2-2-30	102 年度數學學力檢測建構反應題第 2-2 題評閱結果統計表.....	124
表 2-2-31	102 年度數學學力檢測建構反應題第 2-2 題學生解題類型分析.....	126
表 2-3-1	99 年度數學學力檢測建構反應題第二題評閱標準.....	129
表 2-3-2	99 年度數學學力檢測建構反應題第二題評閱結果統計表.....	129
表 2-3-3	99 年度數學學力檢測建構反應題第二題學生解題類型分析.....	130
表 2-3-4	100 年度數學學力檢測建構反應題第 3-1 題評閱標準.....	133
表 2-3-5	100 年度數學學力檢測建構反應題第 3-1 題評閱結果統計表.....	133
表 2-3-6	100 年度數學學力檢測建構反應題第 3-1 題學生解題類型分析.....	134
表 2-3-7	101 年度數學學力檢測建構反應題第 3-1 題評閱標準.....	137
表 2-3-8	101 年度數學學力檢測建構反應題第 3-1 題評閱結果統計表.....	138
表 2-3-9	101 年度數學學力檢測建構反應題第 3-1 題學生解題類型分析.....	139
表 2-3-10	102 年度數學學力檢測建構反應題第 1-1 題評閱標準.....	142
表 2-3-11	102 年度數學學力檢測建構反應題第 1-1 題評閱結果統計表.....	142
表 2-3-12	102 年度數學學力檢測建構反應題第 1-1 題學生解題類型分析.....	143
表 2-3-13	102 年度數學學力檢測建構反應題第 1-2 題評閱標準.....	148
表 2-3-14	102 年度數學學力檢測建構反應題第 1-2 題評閱結果統計表.....	148
表 2-3-15	102 年度數學學力檢測建構反應題第 1-2 題學生解題類型分析.....	149
表 2-4-1	101 年度數學學力檢測建構反應題第四題評閱標準.....	154
表 2-4-2	101 年度數學學力檢測建構反應題第四題評閱結果統計表.....	155
表 2-4-3	101 年度數學學力檢測建構反應題第四題學生解題類型分析.....	156
表 2-5-1	100 年度數學學力檢測建構反應題第二題評閱標準.....	160
表 2-5-2	100 年度數學學力檢測建構反應題第二題評閱結果統計表.....	160
表 2-5-3	100 年度數學學力檢測建構反應題第二題學生解題類型分析.....	161



表 2-6-1	100 年度數學學力檢測建構反應題第六題評閱標準.....	166
表 2-6-2	100 年度數學學力檢測建構反應題第六題評閱結果統計表.....	167
表 2-6-3	100 年度數學學力檢測建構反應題第六題學生解題類型分析.....	169
表 2-7-1	96 年度數學學力檢測建構反應題第二題評閱標準.....	175
表 2-7-2	96 年度數學學力檢測建構反應題第二題評閱結果統計表.....	175
表 2-7-3	96 年度數學學力檢測建構反應題第二題學生解題類型分析.....	176
表 2-8-1	98 年度數學學力檢測建構反應題第一題評閱標準.....	182
表 2-8-2	98 年度數學學力檢測建構反應題第一題評閱結果統計表.....	183
表 2-8-3	98 年度數學學力檢測建構反應題第一題學生解題類型分析.....	184
表 2-8-4	99 年度數學學力檢測建構反應題第四題評閱標準.....	186
表 2-8-5	99 年度數學學力檢測建構反應題第四題評閱結果統計表.....	186
表 2-8-6	99 年度數學學力檢測建構反應題第四題學生解題類型分析.....	187



壹、建構反應題的緣起與目的

臺北市國民小學基本學力檢測始於94年度，其目的為了解臺北市國民小學學生國語文學習成就趨勢，經馬前市長英九於語文委員會會議裁示，由臺北市政府教育局指導，委託本市大同國小承辦，國語實小、太平國小協辦，聘請教育測驗、統計、資訊及國語文學科之專家學者與本市國民教育輔導團國小國語文領域輔導小組共同合作，甄選本市優秀教師，經培訓後，依據九年一貫課程能力指標，對照 Bloom的認知領域層次，編製第一次本市國民小學國語文基本學力檢測測驗題本，95年度由本校增加辦理數學科基本學力檢測，並擬定四年計畫繼續推動本項工作，於每年10月份舉行全市六年級學生國語和數學科基本學力檢測，以了解臺北市學生之學習趨勢。

沿續94、95年度的臺北市國民小學基本學力檢測，經本市郝市長指示，96年度迄今持續辦理國語文及數學基本學力檢測，以了解並掌握本市學生之學習趨勢，並自96年度起，增加「建構反應題」的施測。進行「建構反應題」施測的目的，在於除了透過數學基本學力檢測量化資料的統計結果外，更希望藉由「建構反應題」反映學生解題的思考歷程，並透過分析學生解題的思維，更真實地呈現學生的學習表現。從「建構反應題」的施測結果，讓我們看見學生的多元解題思維、迷思概念，以及數學概念須強化之處，進一步供教師參考。

貳、建構反應題的命題及評閱歷程

臺北市國民小學基本學力檢測從96年度起，命題增加建構反應題(constructed response items)試卷，題數6題。命題特徵有以下幾方面的考量：

- 一、在命題內容方面：為顧及數學綱要的四大主題及不同的概念內容，因而命題內容分佈在不同主題範疇。
- 二、在試題難度方面：為呼應數學學力檢測了解學生基本學習能力的宗旨，命題採中難度試題為主。
- 三、在解題表達方面：命題不僅包括操作作圖說明之外，盡可能要學生寫出其解題的想法和做法。
- 四、在試題類型方面：為了解學生綜合性的數學能力，試題類型著重概念性了解與應用性解題。

建構反應題的評閱，採國際教育成就調查委員會(The International Association for the Evaluation of Educational Achievement)每四年一個週期所舉辦的數學和科學教育成就趨勢調查專案:Trends in International Mathematics and Science Study(簡稱TIMSS)相同的評閱方式，每一題的評閱均採2分、1分及0分三種等第，2分是指正確解題且能清楚說明；1分是指正確解題但未完整說明或部分正確解題；0分是指不正確解題或空白，另外每一級分會再以A、B、C、D.....為標記來為學生的解題類型分類。

在結束建構反應題的施測後，開始建構反應題的評閱流程，包括：一、隨機取樣參加施測人數十分之一的試卷進行試閱，同時建立評閱標準。二、正式閱卷：96年至101年採取人工閱卷再將分數輸入至電腦中，自102年度起改採電腦閱卷，一個題目由二位老師閱卷，若分數不一致，再由第三位老師進行複閱。三、統計分析、撰寫報告：待閱卷結束後將統計資料進行整理分析，計算每一個解題類型的答對次數與百分比，並進一步撰寫報告。

建構反應題命題、審題暨評閱流程

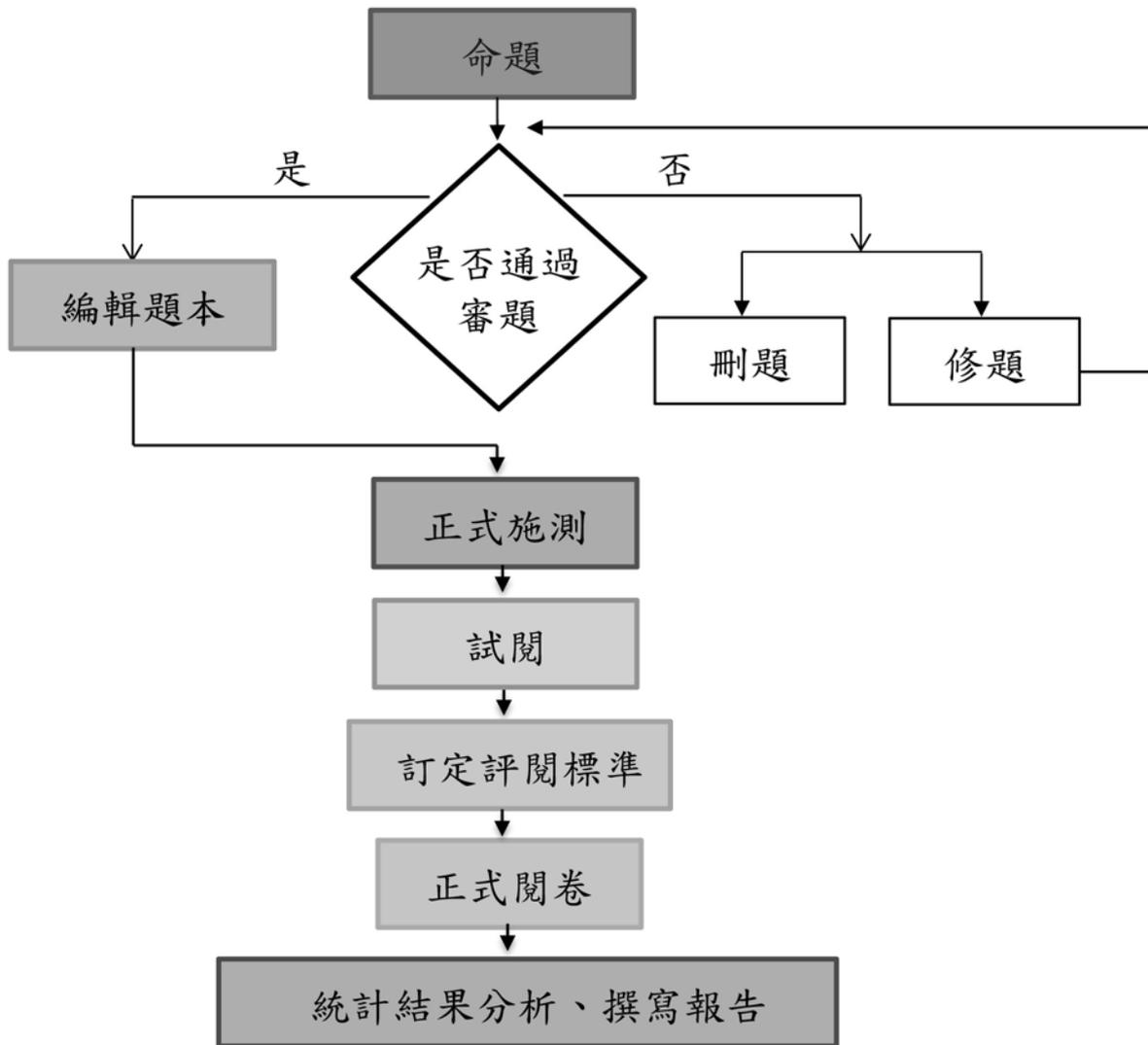


圖 1-1 建構反應題命題、審題暨評閱流程



參、建構反應題的命題架構

96至101年度，數學基本能力檢測係以數學內容領域及數學能力作為命題架構，數學內容領域分為數與量、幾何、統計與機率、代數四個類別，數學能力包括概念性了解(conceptual understanding)、程序性知識(procedural knowledge)及應用解題(application & problem solving)三類。這三種能力的界定參考自美國教育進展評量(NAEP)的方式。以下分別簡要說明其內涵(MAGB,2002)：

- 一、程序性知識：程序性知識包含數學上各種的計算算則，此算則是作為一種工具，創造有效率的需求。包括將閱讀與製作圖表，幾何作圖，及執行一些非計算技能，如四捨五入法、排序也都被認為是程序性知識。學生要能選擇及應用適當的正確程序，驗證與判斷程序的正確性，來展示他們的程序性知識。
- 二、概念性了解：概念性了解為有意義執执行程序上所不可缺少且與解題有密切的連結。學生展示概念性了解有許多不同的方式，包含產生一般的範例及反例，使用模式、圖形與符號，辨認與使用原理，知道與應用事實及定義，建立不同表徵模式的連結，比較、對照、及統整概念，解釋與應用符號去表示概念，及解釋假定與關係等。
- 三、應用解題：應用解題包含在新情境中使用已累積的數學知識的能力。學生展示解題技能有辨認及形成數學問題，決定是否充分與一致性的資料，使用策略、數據、模式、及相關的數學，使用推理（空間、歸納、演繹、統計、比例）及判斷答案的合理性與正確性。

自 102 年起，數學基本能力檢測之數學認知向度參考 TIMSS 區分為：知識(Knowing)、應用(Applying)及推理(Reasoning)三種。

一、知識(Knowing)

知識(Knowing)強調能夠運用數學及思考數學的情境，須仰賴數學知識與數學概念的熟悉度。學生記得愈多相關的知識和瞭解愈廣泛的概念，就愈有潛能去解決各種不同的問題與發展數學的瞭解。如果學生缺乏擁有容易回憶的語言、基本事實、以及數、符號表徵與空間關係的知識庫，學生不可能有目的進行數學思考。其中事實是指包括提供基本數學語言、及重要的數學事實與性質，它是形成數學思考的基礎。學生也需要有效、精確使用各種計算程序於同類型的不同問題，而非單一的問題。概念性知識使學生能建立起各成分知識之間的連結，否則充其量只是獨立的事實。概念性知識使得學生能延伸既有的知識，判斷數學敘述與方法的真實性及創造數學的表徵。以下是知識向度說明表：

表 1-1 知識向度說明表

向度	說明
1. Recall 回想/回憶	回想定義、術語、數的性質、幾何性質與符號。 (例如： $a \times b = ab$, $a+a+a=3a$)。
2. Recognize 辨認	辨認數學物件，例如：形狀、數、量、算式。辨認等價的數學實體(例如：等值分數、小數、百分率，不同方位的簡單幾何圖形)。

3. Compute 計算	進行 $+$ 、 $-$ 、 \times 、 \div 的計算算則或正整數、分數、小數與整數的混合計算；取近似值估算；執行例行的代數運算。
4. Retrieve 提取/擷取	從圖、表或其他資源所提取的訊息；報讀簡單的刻度。
5. Measure 測量	使用測量工具；選擇適當的測量單位。
6. Classify/order 分類/排序	依據共同性質對物件、形狀、數和算式進行分類；針對分類的成份做出正確決定；對不同屬性的數字及物件進行排序。

二、應用 (Applying)

解題是應用領域的中心，但此領域的問題情境是根植於課程的實踐，比推理領域的問題較例行性。例行性問題是教科書典型的練習題，設計為特殊方法與技巧的練習。問題可能只是純數學的問題，也可能設計成真實情境的問題。雖然問題有一定範圍的難度，然而期望學生具有足夠熟悉教科書的各類型問題，使他們能應用已學習的事實、概念與程序，以解決問題。以下是應用向度說明表：

表 1-2 應用向度說明表

向度	說明
1. Select 選擇	選擇有效/適當的運算、方法或策略以解決問題，這些問題對學生而言，有清楚的程序、算則或解決方法。
2. Represent 表徵	以圖、表或圖形呈現數學的資訊及數據；對給定的數學實體或關係，產生等價的表徵。
3. Model 樣式/模型	產生適當的樣式(或模型)，比如使用方程式、幾何圖形或圖示以解決例行性的問題。
4. Implement 執行	執行一組數學的說明(例如針對已知條件畫圖形或圖示)。
5. Solve routine problems 解例行性的問題	解決與課堂中相似的標準問題，這些問題是熟悉的情境或純數學的。

三、推理 (Reasoning)

數學推理牽涉邏輯與系統性的思考。它包含為解決非例行性問題，基於某些樣式與規律的直觀與歸納推理。非例行性問題是指對學生不熟悉的問題，因此求解這類問題的認知要求超過求解例行性問題的需求，雖然求解的知識與技能是他們學過的。

非例行性問題有可能是純數學的或實際生活情境的問題。這兩種類型問題都需要將所學的知識與技能遷移到新的情境上，且需要推理技能是它經常的一個特徵。對於推理的問題可能有不同的方式求解，因為問題是新奇的或情境是複雜的或需要多步驟求解或是基於不同數學方面的知識與瞭解。雖然依據解新奇問題或複雜問題所列舉推理領域的許多行為，每一行為本身表示著有價值的數學教育成果，潛在地影響學習者能更一般性的思考。例如，推理包含觀察與建立猜測的能力，它也包含基於特殊假定、規則與判斷結果合理性的邏輯演繹。以下是推理向度說明表：



表 1-3 推理向度說明表

向度	說明
1. Analyze 分析	在數學情境中，使用變數或物件描述關係，並由給定的訊息中，進行有效的推論。
2. Generalize/ specialize 一般化/特殊化	擴展數學思維和問題解決結果的範圍，應用於更普遍和更廣泛的結果。
3. Integrate/synthesize 統整/綜合	將不同知識元素、相關的表徵與相關的數學觀念，建立良好的連結。結合數學事實、概念與程序以建立結果，及組合結果產生更進一步的結果。
4. Justify 證明	藉由已知的數學結果或性質，提供證明。
5. Solve non-routine problems 解非例行性的問題	解決純數學的或真實生活情境的問題，而這些問題是學生不太可能遇到的。在不熟悉或複雜的情境中應用數學的事實、概念和程序。

肆、建構反應試題使用建議

一、建構反應題可提供參考之處：

- (一) 建構反應題的命題著重以非例行性問題，參考檢測試題的命題題型，可協助老師創新命題的題型，並檢測學生的反應能力。
- (二) 建構反應題可提供必要之圖示或表格，讓學生更加瞭解題意。
- (三) 建構反應題重視學生的解題思維，尊重多元解題策略和紀錄。
- (四) 建構反應題允許學生使用多樣、合理的數學表徵，輔助溝通，並透過溝通討論的方式，與學生共同澄清概念。
- (五) 建構反應題強化數學領域內部的垂直化連結和外部的水平化連結。
- (六) 從學生解題結果瞭解學童的概念發展，洞悉迷思概念之所在，做為研擬教學設計之參考。
- (七) 從學生解題結果分析學生的錯誤類型及迷思概念，藉以進行補救教學，促進概念澄清。
- (八) 建構反應題可與閱讀教學融合，提昇學生閱讀數學題目、掌握題意、發表想法的能力。
- (九) 建構反應題可幫助教師了解數學的關鍵概念：如畫統計圖要注意哪些部份(名稱、刻度、原點、省略符號...)

二、建構反應題在教學上的使用：

(一) 做為評量工具

1. 可用來檢驗學生概念的理解程度。
2. 可用來檢驗學生程序性知識的步驟正確性及應用解題的數學思維。
3. 於一般課堂教學實施後，檢驗學生是否存有迷思概念，瞭解學習成效。
4. 進行概念統整時，檢驗學生是否釐清應有的概念，瞭解其概念發展層次。

(二) 做為上課討論的素材

1. 培養對非例行性問題的閱讀理解能力。
2. 學習多元的解題策略。
3. 比較各種解題表徵的差異。
4. 訓練數學的口語溝通能力。
5. 強化運用符號表徵的能力。
6. 加強對數字、圖像、運算等樣式 (pattern) 的覺察能力。
7. 加強對圖表的報讀、解讀能力。

(三) 做為課後練習

1. 加強使用工具的能力。
2. 加強製作圖表的能力。
3. 學習用圖像表徵對數與計算教材的理解。
4. 作為學生學習後補充教學教材，可以個別解題後、發表、共同討論。
5. 期末考後、寒暑假前，不指定範圍，用來訓練學生解非例行性題目的能力。



三、建構反應題運用於教學的注意事項：

(一) 命題方面：

1. 建構反應題的命題能與真實情境結合，而不是為了命題而命題
2. 建構反應題的命題需提供學生必要的適當工具、圖示和解題線索。
3. 建構反應題應避免限制唯一解題策略的命題，範圍命題不超過學生學習經驗的可能建構區。
4. 建構反應題的命題與生活的連結需符合學生經驗，注意使用生活經驗解題的合理性（例如：六年級學生的體重）。
5. 建構反應題的命題與解題應避免繁複難以掌握題意的題幹敘述及繁複的計算，因而模糊了評量的重點。

(二) 學生方面：

1. 概念抽象的操作—應設法使學生於具體物件或新舊經驗的關係中建立新概念，或藉由操作歷程協助學生將概念抽象化。
2. 解題方法的訓練—透過觀察與討論別人的解法，了解題目的多元解法、各種解法的優缺點。
3. 欣賞數學的解題—培養欣賞別人的解題與培養欣賞數學的美。
4. 迷思概念的使用與辯證—善加利用迷思概念以堅固學生的概念，了解迷思概念的原因、如何避免錯誤。

(三) 教師方面：

1. 教師應指導學生理解題意、擬定解題計畫、執行解題，並於解題完畢後進行回顧。
2. 為增加學生的應用解題能力，師生間適時的提問與討論等互動過程，亦有助於教師了解學生概念理解程度與解題策略。
3. 建構反應題的的評量可提供教師質的評量的示例，讓教師除了量的評量之外，增加質性的評量。



伍、96-102 年度建構反應試題檢測結果分析與教學建議

一、整數

(一)四則混合計算

1.檢測年度：97 年度

2.題目：

「算算看，並把你的算法和答案寫下來。

$$16 + 64 \div (24 - 8 \times 2) \times 2$$

3.評量目的：

本試題主要在評量學生是否確實掌握四則混合計算的算則規約並正確計算出答案。

4.評閱標準：

評閱標準 2 級分有 2 類、0 級分有 7 類，相關評閱標準與舉隅如下表：

表 2-1-1 97 年度數學建構反應題第一題評閱標準

類別	評閱標準 (評閱舉隅)
2-A	逐次減項化簡得出正確答案。
2-B	分開計算得出正確答案，但未能使用等號逐次化簡。
0-A	空白
0-B	括號內雖能先乘後減，而其他步驟卻有部分由左而右依序計算(有逐次減項)。
0-C	括號內雖能先乘後減，而其他步驟卻有部分由左而右依序計算(未逐次減項)。
0-D	括號內未能先乘後減。
0-E	受先乘後除(含先加後減)或依序由左至右計算的影響。
0-F	答案錯，且在化簡過程中未能符合數學上等號的意義。
0-X	其他

5.評閱結果：

(1) 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-1-2 97 年度數學建構反應題第一題評閱結果統計表

得分 類型	0							2		合計
	0A	0B	0C	0D	0E	0F	0X	2A	2B	
人數	1	49	18	14	54	6	19	130	9	300
百分比(%)	0.33	16.33	6.00	4.67	18.00	2.00	6.33	43.33	3.00	
人數	161							139		
百分比(%)	53.67							46.33		

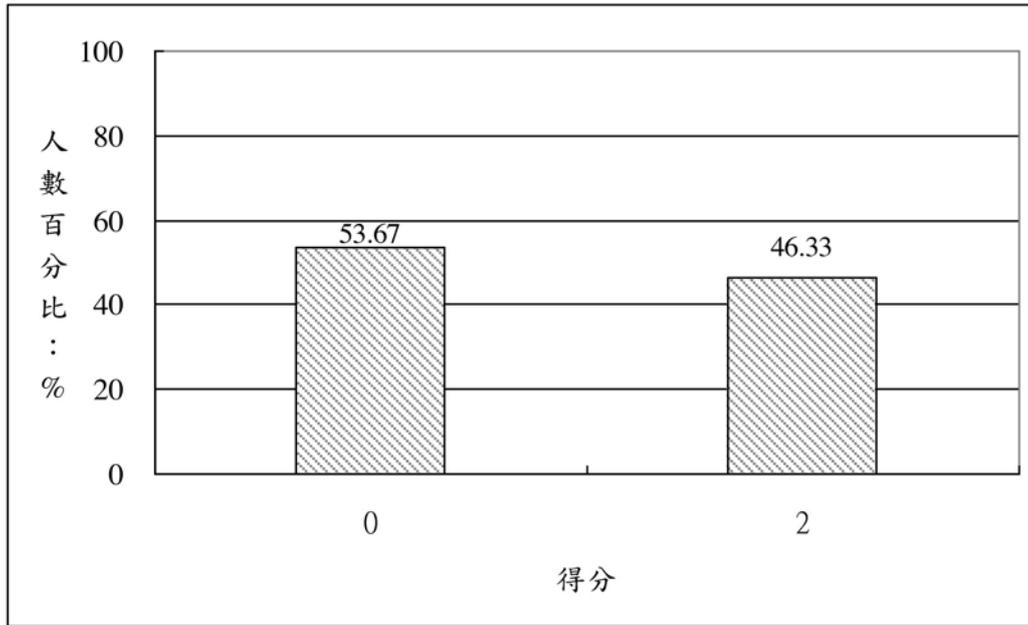


圖 2-1-1 97 年度數學學力檢測建構反應題第一題得分統計圖

由表 2-1-2 可以得知，本試題經評閱後得 2 級分的有 139 人，占總人數的 46.33%。整體的答對率為四成六。這些得到 2 級分的答題類型又分二種：第一是以逐次減項化簡得出正確答案，有 130 人，占全體答對人數的 43.33%；第二是以單步驟算式分別分開計算得出正確答案，但未能使用等號逐次化簡，有 9 人，占全體答對人數的 3%。

得到 0 分的有 161 人，可分為七種類型，第一種是答題空白，僅有 1 人是這種情形；第二種及第三種是括號內雖能先乘後減，而其他步驟卻有部分由左而右依序計算，佔了 22.33%；第四種是括號內未能先乘後減，有 4.67%；第五種是受先乘後除(含先加後減)或依序由左至右計算的影響，有 18%；第六種是答案錯，且在化簡過程中未能符合數學上等號的意義，有 2%，第七種是胡亂作答，有 6.33%。

(2) 答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-1-3 97 年度數學建構反應題第一題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	$16 + 64 \div (24 - 8 \times 2) \times 2$ $16 + 64 \div (24 - 8 \times 2) \times 2$ $= 16 + 64 \div (24 - 16) \times 2$ $= 16 + 64 \div 8 \times 2$ $= 16 + 8 \times 2$ $= 16 + 16$ $= 32$ <p style="text-align: right;">A=32</p>	正確使用逐次減項計算的方式解題。



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	$16 + 64 \div (24 - 8 \times 2) \times 2$ $= 16 + 8 \times 2$ $= 32$ <p style="text-align: right;">A: 32</p>	<p>正確使用逐次減項計算。一個算式即化簡了三個計算，但算法與答案皆正確。</p>
2	2-B	$16 + 64 \div (24 - 8 \times 2) \times 2$ $8 \times 2 = 16$ $24 - 16 = 8$ $64 \div 8 = 8$ $8 \times 2 = 16$ $16 + 16 = 32$ <p style="text-align: right;">A: 32</p>	<p>未能以逐次減項表徵計算過程，但能掌握四則混合計算的規約（先做括號內運算，先乘除再加減），正確解答。</p>
2	2-B	$16 + 64 \div (24 - 8 \times 2) \times 2$ $\begin{array}{r} 24 \\ -16 \\ \hline 8 \end{array} \quad 64 \div 8 = 8$ $16 + 8 \times 2 = 32$ $\begin{array}{r} 16 \\ +16 \\ \hline 32 \end{array}$ <p style="text-align: right;">答: 32</p>	<p>未能以逐次減項表徵計算過程，混雜著橫式、直式計算，算式的排列有由左向右、也有由上向下，運算過程表徵雖不夠清晰，但算法與答案皆正確。</p>
0	0-B	$16 + 64 \div (24 - 8 \times 2) \times 2$ $= 16 + 64 \div (24 - 16) \times 2$ $= 80 \div 8 \times 2$ $= 20$	<p>使用逐次減項，括號內雖能先乘後減，而化簡第二式「$16 + 64 \div (24 - 16) \times 2$」時，未能先除後加而算錯（依序由左至右計算，先運算 $16 + 64$）。</p>

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-B	$16 + 64 \div (24 - 8 \times 2) \times 2$ $16 + 64 \div 8 \times 2 = 16 + 8 \times 2 = 24 \times 2 = 48$ $A: 48$	使用逐次減項，括號內雖能先乘後減，而化簡第三式「 $16 + 8 \times 2$ 」時，未能先乘後加而算錯（由左而右依序計算，先運算 $16 + 8$ ）。
0	0-C	$16 + 64 \div (24 - 8 \times 2) \times 2$ $8 \times 2 = 16$ $24 - 16 = 8$ $64 \div 8 = 8$ $16 + 8 = 24$ $24 \times 2 = 48$ $A: 48$	未能使用逐次減項，而且括號內雖能先乘後減，化簡至「 $16 + 8 \times 2$ 」時，未能先乘後加而算錯。
0	0-C	$16 + 64 \div (24 - 8 \times 2) \times 2$ $8 \times 2 = 16$ $24 - 16 = 8$ $16 + 64 = 80$ $80 \div 8 \times 2 = 20$ $A: 20$	未能使用逐次減項，而且括號內雖能先乘後減，化簡至「 $16 + 64 \div (24 - 16) \times 2$ 」時，未能先除後加而算錯。
0	0-D	$16 + 64 \div (24 - 8 \times 2) \times 2$ $= 80 \div (16 \times 2) \times 2$ $= 80 \div 32 \times 2$ $= 2.5 \times 2$ $= 5$ $A: 5$	能先進行括號內的運算，但所有的算式（包含括號內）未能先乘除後加減，全部都依序由左至右計算。



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-D	$16 + 64 \div (24 - 8 \times 2) \times 2$ $= 16 + 64 \div 32 \times 2$ $= 16 + 2 \times 2$ $= 18 \times 2$ $= 36$	括號內未能先乘後減；化簡第三式「 $16 + 2 \times 2$ 」時，未能先乘後加而算錯。
0	0-E	$16 + 64 \div (24 - 8 \times 2) \times 2$ $= 16 + 64 \div (24 - 16) \times 2$ $= 16 + 64 \div 8 \times 2$ $= 16 + 64 \div 16$ $= 16 + 4$ $= 20$ <p style="text-align: right;">A: 20</p>	雖依整數四則運算規則計算，但在化簡第三式「 $16 + 64 \div 8 \times 2$ 」時，卻受到先乘後除的影響先算「 8×2 」而算錯。
0	0-E	$16 + 64 \div (24 - 8 \times 2) \times 2$ $24 - 16 = 8$ $8 \times 2 = 16$ $64 \div 16 = 4$ $16 + 4 = 20$ <p style="text-align: right;">A: 20</p>	未能使用逐次減項，括號內雖能先乘後減，但在算「 $16 + 64 \div 8 \times 2$ 」時，因受到先乘後除的影響先算「 8×2 」而算錯。
0	0-F	$16 + 64 \div (24 - 8 \times 2) \times 2 = (20)$ $= (24 - 16)$ $= (8)$ $= 16 + 64 \div 8 \times 2$ $= 80 \div 8 \times 2$ $= 10 \times 2$ $= 20$ <p style="text-align: right;">A: 20</p>	試圖使用逐次減項的形式，但在化簡過程中未能符合數學上等號的意義，在算「 $16 + 64 \div 8 \times 2$ 」時，先算「 $16 + 64$ 」，不符四則運算規則而算錯。

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-F	$16 + 64 \div (24 - 8 \times 2) \times 2$ $= 80 \div 8$ $= 10 \times 2$ $= 20$	計算過程不符四則運算規則，而且在化簡過程中未能符合數學上等號的意義而算錯。
0	0-X	$16 + 64 \div (24 - 8 \times 2) \times 2$ $= 80 \div (8 \times 2) \times 2$ $= 80 \div (16 \times 2) \times 2$ $= 80 \div 32$ $= 2,56875$ <p style="text-align: right;">A: 2.56875</p>	能知道括弧內的算式先運算，但完全依序由左至右計算，且在乘除混合時，受先乘後除的影響而算錯。
0	0-X	$16 + 64 \div (24 - 8 \times 2) \times 2$ $\begin{array}{r} 8 \\ \times 2 \\ \hline 16 \end{array}$ $\begin{array}{r} 4 \\ -16 \\ \hline 8 \end{array}$ $\begin{array}{r} 16 \\ +8 \\ \hline 24 \end{array}$ $\begin{array}{r} 24 \\ +64 \\ \hline 88 \end{array}$ $\begin{array}{r} 88 \\ \times 2 \\ \hline 176 \end{array}$ <p style="text-align: right;">A: 176</p>	能正確運算括弧內的算式，但無法掌握之後的運算順序。

從學生在本題的答題情形來看，絕大部分的學生都能掌握括號內算式優先計算的規約，有 46.33% 的學生能正確掌握四則混合計算規約，其中 43.33% 的學生能使用逐次減項的形式正確算出答案，3% 的學生未能使用逐次減項表徵解題過程，但算對。另外有 22.33% 的學生僅能掌握括號內二步驟的算式，遇到三步驟算式時即依序由左至右計算；也有 4.67% 的學生完全依序由左至右計算；值得注意的是有 18% 的學生誤解「先乘除」的意思為「先乘後除」，也有 2% 的學生算式中不能符合數學上等號的意義，最後有 6.33% 的學生計算混亂，有多重的錯誤。



6. 教學建議：

- (1) 介紹「先乘除後加減」的意義時，要強調「先乘除」是「先乘或除」的意思，也就是當乘除混合時，依乘除的先後順序運算；加減亦同；並透過豐富的題型檢驗學生是否誤解該規約為「先乘後除，先加後減」。
- (2) 除了課本上二步驟的四則混合計算題外，在練習中偶而加入一些三步驟、四步驟的四則混合計算題，以檢驗學生對四則混合計算規約的熟悉情形。
- (3) 加強建立學生的等號對稱性意義，教師可安排相關活動讓學生理解「 $=$ 」代表兩邊數量一樣。
- (4) 練習逐次減項的表達方式。

(二) 四則混合的應用

1. 檢測年度：97 年度

2. 題目：

「小明帶 500 元到快樂早餐店幫家人買早餐，一共買 5 份。小明買的早餐每份都要有餐點和飲料，每份最多不可超過 70 元，而且每份早餐的組合不同。快樂早餐店的價目表如下：

餐點					飲料				
三 明 治	蘿 蔔 糕	蛋 餅	豬 排 堡	雞 腿 堡	豆 漿	紅 茶	奶 茶	咖 啡	果 汁
35 元	30 元	30 元	45 元	55 元	15 元	20 元	30 元	35 元	25 元

請回答下列問題：

(1) 小明買的這 5 份早餐可以怎樣組合呢？請把組合的方式填入下表。

份數別 \ 種類	餐點	飲料	每份價錢
第 1 份			
第 2 份			
第 3 份			
第 4 份			
第 5 份			

(2) 依據上表所列的早餐組合，這 5 份餐點一共花了多少元？找回多少元？把你的算法和答案寫下來。」

3. 評量目的：

本試題主要評量學生能否綜合應用數學解決生活問題，並正確計算出答案。

4. 評閱標準：

評閱標準 2 級分有 1 類、1 級分有 2 類、0 級分有 2 類，相關評閱標準如下表：

表 2-1-4 97 年度數學建構反應題第五題評閱標準

類別	評閱標準
2-A	組合全對、每一份餐點的金額不超過 70 元、加總及找回的錢也對。
1-A	組合全對、每一份餐點的金額不超過 70 元，但加總或找回的錢有錯。
1-B	組合全對、部分餐點的金額超過 70 元。
0-B	未能組合出五種不同的餐點。
0-X	其他(含寫出組合但未加總、計算找回的錢)。



5.評閱結果：

(1)評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-1-5 97 年度數學建構反應題第五題評閱結果統計表

得分 類型	0		1		2	合計
	0B	0X	1A	1B	2A	
人數	2	3	67	6	222	300
百分比(%)	0.67	1.00	22.33	2.00	74.00	
人數	5		73		222	
百分比(%)	1.67		24.33		74.00	

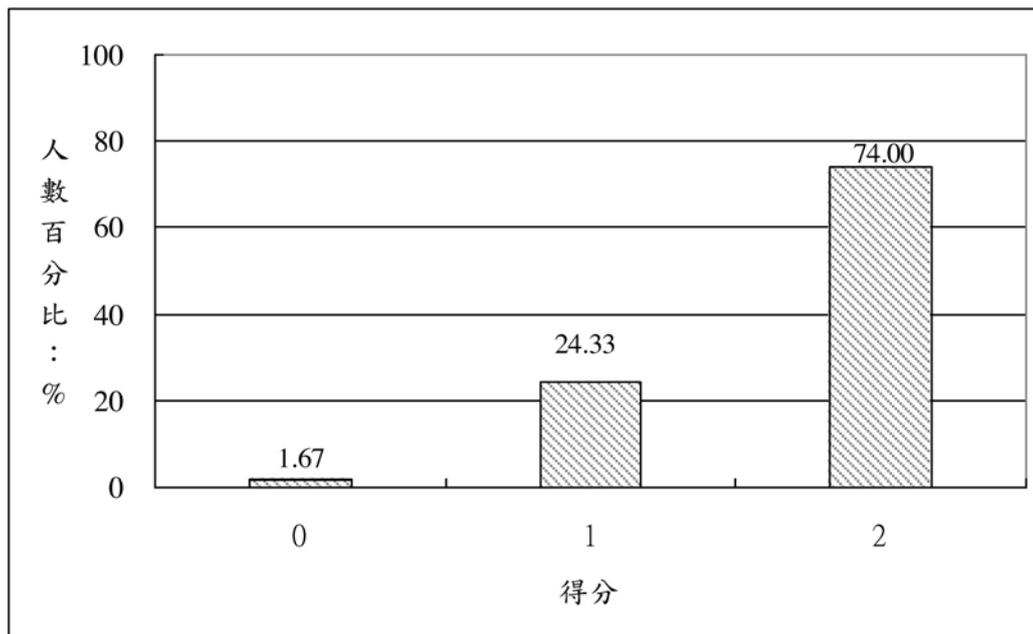


圖 2-1-2 97 年度數學學力檢測建構反應題第五題得分統計圖

由表 2-1-5 可以得知，本試題經評閱後得 2 級分的有 222 人，占總人數的 74%，整體的答對率達到七成四。這些得到 2 級分的答題類型是：組合全對、每一份餐點的金額不超過 70 元、加總及找回的錢也對。

得到 1 級分的有 73 人，占總人數的 24.33%。得到 1 級分的答題類型又分二種：一種是組合全對、每一份餐點的金額不超過 70 元，但加總或找回的錢有錯，有 67 人，占總人數的 22.33%，另一種是組合全對、部分餐點的金額超過 70 元，有 6 人，占總人數的 2%。

得到 0 級分的僅有 5 人，占總人數的 1.67%。其錯誤類型可區分為：未能組合出五種不同的餐點，以及其他（含寫出組合但未加總、計算找回的錢）。

(2)答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-1-6 97 年度數學建構反應題第五題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析																														
2	2-A	<table border="1"> <thead> <tr> <th>份數別</th> <th>種類</th> <th>餐點</th> <th>飲料</th> <th>每份價錢</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>第 1 份</td> <td></td> <td>蘿蔔糕</td> <td>咖啡</td> <td>65 元</td> </tr> <tr> <td>第 2 份</td> <td></td> <td>雞腿堡</td> <td>豆漿</td> <td>70 元</td> </tr> <tr> <td>第 3 份</td> <td></td> <td>三明治</td> <td>咖啡</td> <td>70 元</td> </tr> <tr> <td>第 4 份</td> <td></td> <td>蛋餅</td> <td>奶茶</td> <td>60 元</td> </tr> <tr> <td>第 5 份</td> <td></td> <td>豬排堡</td> <td>果汁</td> <td>70 元</td> </tr> </tbody> </table> <p> $70 \times 3 = 210$ $60 \times 2 + 5 = 125$ $210 + 125 = 335$ $500 - 335 = 165$ 共 335 元, 找回 165 元 </p>	份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢	第 1 份		蘿蔔糕	咖啡	65 元	第 2 份		雞腿堡	豆漿	70 元	第 3 份		三明治	咖啡	70 元	第 4 份		蛋餅	奶茶	60 元	第 5 份		豬排堡	果汁	70 元	這兩種做法中每份早餐的組合都不同，且每份都未超過 70 元，並正確的將五份早餐的價錢加起來，求出花掉的錢，再用 500 元減掉花掉的總金額，算出可以找回的錢。
		份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢																											
第 1 份		蘿蔔糕	咖啡	65 元																													
第 2 份		雞腿堡	豆漿	70 元																													
第 3 份		三明治	咖啡	70 元																													
第 4 份		蛋餅	奶茶	60 元																													
第 5 份		豬排堡	果汁	70 元																													
<table border="1"> <thead> <tr> <th>份數別</th> <th>種類</th> <th>餐點</th> <th>飲料</th> <th>每份價錢</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>第 1 份</td> <td></td> <td>三明治</td> <td>奶茶</td> <td>65 元</td> </tr> <tr> <td>第 2 份</td> <td></td> <td>蛋餅</td> <td>咖啡</td> <td>65 元</td> </tr> <tr> <td>第 3 份</td> <td></td> <td>蘿蔔糕</td> <td>豆漿</td> <td>45 元</td> </tr> <tr> <td>第 4 份</td> <td></td> <td>豬排堡</td> <td>紅茶</td> <td>65 元</td> </tr> <tr> <td>第 5 份</td> <td></td> <td>三明治</td> <td>果汁</td> <td>60 元</td> </tr> </tbody> </table> <p> $500 - (65 \times 3) - (45 + 60)$ $= 500 - 195 - 105$ $= 305 - 105$ $= 200$ A: 300 元 200 元 </p>	份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢	第 1 份		三明治	奶茶	65 元	第 2 份		蛋餅	咖啡	65 元	第 3 份		蘿蔔糕	豆漿	45 元	第 4 份		豬排堡	紅茶	65 元	第 5 份		三明治	果汁	60 元			
份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢																													
第 1 份		三明治	奶茶	65 元																													
第 2 份		蛋餅	咖啡	65 元																													
第 3 份		蘿蔔糕	豆漿	45 元																													
第 4 份		豬排堡	紅茶	65 元																													
第 5 份		三明治	果汁	60 元																													
1	1-A	<table border="1"> <thead> <tr> <th>份數別</th> <th>種類</th> <th>餐點</th> <th>飲料</th> <th>每份價錢</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>第 1 份</td> <td></td> <td>45</td> <td>15</td> <td>60</td> </tr> <tr> <td>第 2 份</td> <td></td> <td>35</td> <td>20</td> <td>55</td> </tr> <tr> <td>第 3 份</td> <td></td> <td>30</td> <td>15</td> <td>45</td> </tr> <tr> <td>第 4 份</td> <td></td> <td>55</td> <td>15</td> <td>70</td> </tr> <tr> <td>第 5 份</td> <td></td> <td>30</td> <td>20</td> <td>50</td> </tr> </tbody> </table> <p> $\begin{array}{r} 60 \\ 55 \\ + 45 \\ \hline 160 \end{array} \quad \begin{array}{r} 160 \\ 70 \\ + 50 \\ \hline 280 \end{array} \quad \begin{array}{r} 500 \\ - 280 \\ \hline 120 \end{array}$ $A = 280 \text{ 元 } 120 \text{ 元}$ </p>	份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢	第 1 份		45	15	60	第 2 份		35	20	55	第 3 份		30	15	45	第 4 份		55	15	70	第 5 份		30	20	50	此種做法沒有寫出餐點和飲料的名稱，但每一份組合的金額不完全相同，餐點和飲料的價錢都與題目給定的相符，且每份價錢均不超過 70 元，因此認定為不同的正確組合。此做法在計算找回的錢時出現錯誤，將 $500 - 280$ 的結果誤算成 120。
份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢																													
第 1 份		45	15	60																													
第 2 份		35	20	55																													
第 3 份		30	15	45																													
第 4 份		55	15	70																													
第 5 份		30	20	50																													



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析																														
1	1-A	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>份數別</th> <th>種類</th> <th>餐點</th> <th>飲料</th> <th>每份價錢</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>第 1 份</td> <td></td> <td>三明治</td> <td>果汁</td> <td>60</td> </tr> <tr> <td>第 2 份</td> <td></td> <td>蘿蔔糕</td> <td>咖啡</td> <td>65</td> </tr> <tr> <td>第 3 份</td> <td></td> <td>蛋餅</td> <td>奶茶</td> <td>60</td> </tr> <tr> <td>第 4 份</td> <td></td> <td>豬排堡</td> <td>紅茶</td> <td>65</td> </tr> <tr> <td>第 5 份</td> <td></td> <td>雞腿堡</td> <td>豆漿</td> <td>70</td> </tr> </tbody> </table> <p style="margin-top: 10px;"> $60 + 65 + 60 + 65 + 70 = 385$ $500 - 385 = 115$ </p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> $\begin{array}{r} 60 \\ + 65 \\ \hline 125 \\ + 65 \\ \hline 185 \\ + 65 \\ \hline 250 \end{array}$ </div> <div style="text-align: center;"> $\begin{array}{r} 125 \\ + 60 \\ \hline 185 \\ + 70 \\ \hline 250 \\ + 65 \\ \hline 315 \end{array}$ </div> <div style="text-align: center;"> $\begin{array}{r} 490 \\ 500 \\ - 385 \\ \hline 115 \end{array}$ </div> </div> <p style="margin-top: 10px;">A. 共花了 385 元 ① 找回 115 元</p>	份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢	第 1 份		三明治	果汁	60	第 2 份		蘿蔔糕	咖啡	65	第 3 份		蛋餅	奶茶	60	第 4 份		豬排堡	紅茶	65	第 5 份		雞腿堡	豆漿	70	<p>此種做法中每份早餐的組合都不同，且每份都未超過 70 元，但在加總全部的金額時，多加了一份 65 元的組合，所以加總的金額和找回的錢數都算錯了。</p>
份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢																													
第 1 份		三明治	果汁	60																													
第 2 份		蘿蔔糕	咖啡	65																													
第 3 份		蛋餅	奶茶	60																													
第 4 份		豬排堡	紅茶	65																													
第 5 份		雞腿堡	豆漿	70																													
1	1-A	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>份數別</th> <th>種類</th> <th>餐點</th> <th>飲料</th> <th>每份價錢</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>第 1 份</td> <td></td> <td>三明治</td> <td>咖啡</td> <td>70</td> </tr> <tr> <td>第 2 份</td> <td></td> <td>雞腿堡</td> <td>豆漿</td> <td>70</td> </tr> <tr> <td>第 3 份</td> <td></td> <td>豬排堡</td> <td>果汁</td> <td>70</td> </tr> <tr> <td>第 4 份</td> <td></td> <td>蘿蔔糕</td> <td>紅茶</td> <td>50</td> </tr> <tr> <td>第 5 份</td> <td></td> <td>蛋餅</td> <td>奶茶</td> <td>60</td> </tr> </tbody> </table> <p style="margin-top: 10px;"> $70 \times 3 + 50 + 60 = 210 + 50 + 60 = 320$ $700 - 320 = 380$ </p> <p style="margin-top: 10px;">A. ① 320 元 ② 380 元</p>	份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢	第 1 份		三明治	咖啡	70	第 2 份		雞腿堡	豆漿	70	第 3 份		豬排堡	果汁	70	第 4 份		蘿蔔糕	紅茶	50	第 5 份		蛋餅	奶茶	60	<p>此種做法中每份早餐的組合都不同，且每份都未超過 70 元，並正確的將五份早餐的價錢加起來，求出總共花掉的錢，但最後卻用 700 元減掉花掉的總金額，計算找回的錢。猜測答題學生出現這種錯誤的原因，可能是看錯題目的數字，或者是受到每份組合不超過 70 元的影響，誤將原來的錢數當成 700 元。</p>
份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢																													
第 1 份		三明治	咖啡	70																													
第 2 份		雞腿堡	豆漿	70																													
第 3 份		豬排堡	果汁	70																													
第 4 份		蘿蔔糕	紅茶	50																													
第 5 份		蛋餅	奶茶	60																													
1	1-A	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>份數別</th> <th>種類</th> <th>餐點</th> <th>飲料</th> <th>每份價錢</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>第 1 份</td> <td></td> <td>三明治</td> <td>咖啡</td> <td>70</td> </tr> <tr> <td>第 2 份</td> <td></td> <td>蘿蔔糕</td> <td>奶茶</td> <td>60</td> </tr> <tr> <td>第 3 份</td> <td></td> <td>豬排堡</td> <td>果汁</td> <td>70</td> </tr> <tr> <td>第 4 份</td> <td></td> <td>蛋餅</td> <td>紅茶</td> <td>50</td> </tr> <tr> <td>第 5 份</td> <td></td> <td>雞腿堡</td> <td>豆漿</td> <td>70</td> </tr> </tbody> </table> <p style="margin-top: 10px;"> (2) 依據上表所列的早餐組合，這 5 份餐點一共花了多少元？找回多少元？把你的算法和答案寫下來。 </p> <p style="margin-top: 10px;"> ① 早餐每份不超過七十元，那不就五份就 350 元，結果 320 元 350 - 320 = 30 元 那用 350 元減 </p>	份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢	第 1 份		三明治	咖啡	70	第 2 份		蘿蔔糕	奶茶	60	第 3 份		豬排堡	果汁	70	第 4 份		蛋餅	紅茶	50	第 5 份		雞腿堡	豆漿	70	<p>這兩種做法中每份早餐的組合都不同，且每份都未超過 70 元，並正確的將五份早餐的價錢加起來，求出總共花掉的錢，但最後卻用 350 元減掉花掉的總金額，計算找回的錢。答題學生認為每份早餐不超過 70 元，買五份最多花費 350 元，所以用 350 元減</p>
份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢																													
第 1 份		三明治	咖啡	70																													
第 2 份		蘿蔔糕	奶茶	60																													
第 3 份		豬排堡	果汁	70																													
第 4 份		蛋餅	紅茶	50																													
第 5 份		雞腿堡	豆漿	70																													

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析																														
		<table border="1"> <thead> <tr> <th>份數別</th> <th>種類</th> <th>餐點</th> <th>飲料</th> <th>每份價錢</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>第 1 份</td> <td></td> <td>蛋餅</td> <td>咖啡</td> <td>65元</td> </tr> <tr> <td>第 2 份</td> <td></td> <td>豬排堡</td> <td>果汁</td> <td>70元</td> </tr> <tr> <td>第 3 份</td> <td></td> <td>雞腿堡</td> <td>豆漿</td> <td>70元</td> </tr> <tr> <td>第 4 份</td> <td></td> <td>三明治</td> <td>紅茶</td> <td>55元</td> </tr> <tr> <td>第 5 份</td> <td></td> <td>蘿蔔糕</td> <td>奶茶</td> <td>60元</td> </tr> </tbody> </table> <p> $70 \times 5 - (65 + 70 + 70 + 55 + 60)$ $65 + 70 + 70 + 55 + 60$ $= 350 - 320$ $= 135 + 70 + 55 + 60$ $= 30$ $= 205 + 55 + 60$ $= 320$ $= 260 + 60$ $= 320$ </p> <p>A: 花了320元找回30元</p>	份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢	第 1 份		蛋餅	咖啡	65元	第 2 份		豬排堡	果汁	70元	第 3 份		雞腿堡	豆漿	70元	第 4 份		三明治	紅茶	55元	第 5 份		蘿蔔糕	奶茶	60元	<p>掉花掉的錢，忽略了題目的條件「帶500元到早餐店」。</p>
份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢																													
第 1 份		蛋餅	咖啡	65元																													
第 2 份		豬排堡	果汁	70元																													
第 3 份		雞腿堡	豆漿	70元																													
第 4 份		三明治	紅茶	55元																													
第 5 份		蘿蔔糕	奶茶	60元																													
1	1-A	<table border="1"> <thead> <tr> <th>份數別</th> <th>種類</th> <th>餐點</th> <th>飲料</th> <th>每份價錢</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>第 1 份</td> <td></td> <td>三明治</td> <td>咖啡</td> <td>70</td> </tr> <tr> <td>第 2 份</td> <td></td> <td>蛋餅</td> <td>紅茶</td> <td>50</td> </tr> <tr> <td>第 3 份</td> <td></td> <td>雞腿堡</td> <td>豆漿</td> <td>70</td> </tr> <tr> <td>第 4 份</td> <td></td> <td>蘿蔔糕</td> <td>奶茶</td> <td>60</td> </tr> <tr> <td>第 5 份</td> <td></td> <td>豬排堡</td> <td>果汁</td> <td>70</td> </tr> </tbody> </table> <p> $(70 \times 3) + 60 + 50$ $20 + 10$ $= 210 + 60 + 50$ $= 30$ $= 320$ $70 - 50 = 20$ $70 - 60 = 10$ </p> <p> $\textcircled{1} 320 \text{元}$ $\textcircled{2} 30 \text{元}$ </p>	份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢	第 1 份		三明治	咖啡	70	第 2 份		蛋餅	紅茶	50	第 3 份		雞腿堡	豆漿	70	第 4 份		蘿蔔糕	奶茶	60	第 5 份		豬排堡	果汁	70	<p>此種做法中每份早餐的組合都不同，且每份都未超過70元，並正確的將五份早餐的價錢加起來，求出總共花掉的錢，但最後要計算找回的錢時，答題學生認為每份早餐不超過70元，所以就以每份早餐至多花費70元，來分別計算價錢低於70元的兩份組合可以找回的錢，再加起來得到全部找回的錢，忽略了題目的條件「帶500元到早餐店」。</p>
份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢																													
第 1 份		三明治	咖啡	70																													
第 2 份		蛋餅	紅茶	50																													
第 3 份		雞腿堡	豆漿	70																													
第 4 份		蘿蔔糕	奶茶	60																													
第 5 份		豬排堡	果汁	70																													



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析																								
1	1-A	<table border="1"> <thead> <tr> <th>份數別 \ 種類</th> <th>餐點</th> <th>飲料</th> <th>每份價錢</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>第 1 份</td> <td>三明治</td> <td>咖啡</td> <td>35+35</td> </tr> <tr> <td>第 2 份</td> <td>豬排堡</td> <td>紅茶</td> <td>45x1 + 20x1</td> </tr> <tr> <td>第 3 份</td> <td>蛋餅</td> <td>咖啡</td> <td>30x1 + 35x1</td> </tr> <tr> <td>第 4 份</td> <td>雞腿堡</td> <td>豆漿</td> <td>55+15</td> </tr> <tr> <td>第 5 份</td> <td>蘿蔔糕</td> <td>紅茶</td> <td>30+30</td> </tr> </tbody> </table> <p> $35+35+45+20+30+35+55+15+30+30=335$ $335 \approx 400$ $400-335=25$ </p> <p> $A = \begin{cases} \text{① 大約花 400 元} \\ \text{② 找回 25 元} \end{cases}$ </p>	份數別 \ 種類	餐點	飲料	每份價錢	第 1 份	三明治	咖啡	35+35	第 2 份	豬排堡	紅茶	45x1 + 20x1	第 3 份	蛋餅	咖啡	30x1 + 35x1	第 4 份	雞腿堡	豆漿	55+15	第 5 份	蘿蔔糕	紅茶	30+30	<p>此種做法的每份早餐組合都正確，也計算出花費的總金額，但最後要計算找回的錢時，答題學生將花費總數以無條件進入法取概數到百位，得到 400 元，再以 400 元減掉總共花費的 375 元，算出找回 25 元。此種做法中有三個錯誤：</p> <ol style="list-style-type: none"> ① 花費總金額計算錯誤，應為 330 元。 ② 猜測答題學生取概數的原因，可能是因為學生認為生活中花費 335 元時，只要付 400 元給老闆找錢即可，忽略了題目的條件「帶 500 元到早餐店」。 ③ 計算找回的錢時，把前面算出的花費總金額 335 元誤寫成了 375 元。
份數別 \ 種類	餐點	飲料	每份價錢																								
第 1 份	三明治	咖啡	35+35																								
第 2 份	豬排堡	紅茶	45x1 + 20x1																								
第 3 份	蛋餅	咖啡	30x1 + 35x1																								
第 4 份	雞腿堡	豆漿	55+15																								
第 5 份	蘿蔔糕	紅茶	30+30																								
1	1-B	<table border="1"> <thead> <tr> <th>份數別 \ 種類</th> <th>餐點</th> <th>飲料</th> <th>每份價錢</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>第 1 份</td> <td>三明治</td> <td>豆漿</td> <td>50元</td> </tr> <tr> <td>第 2 份</td> <td>蘿蔔糕</td> <td>紅茶</td> <td>50元</td> </tr> <tr> <td>第 3 份</td> <td>蛋餅</td> <td>奶茶</td> <td>60元</td> </tr> <tr> <td>第 4 份</td> <td>豬排堡</td> <td>咖啡</td> <td>80元</td> </tr> <tr> <td>第 5 份</td> <td>雞腿堡</td> <td>果汁</td> <td>80元</td> </tr> </tbody> </table> <p> $50+50+60+80+80=320$ $500-320=180$ </p> <p> $\begin{array}{r} 50 \\ 50 \\ 60 \\ 80 \\ 80 \\ \hline 320 \end{array}$ </p> <p> $\begin{array}{r} 500 \\ -320 \\ \hline 180 \end{array}$ </p> <p> $A = \text{① } 320 \text{ 元 } \text{② } 180 \text{ 元}$ </p>	份數別 \ 種類	餐點	飲料	每份價錢	第 1 份	三明治	豆漿	50元	第 2 份	蘿蔔糕	紅茶	50元	第 3 份	蛋餅	奶茶	60元	第 4 份	豬排堡	咖啡	80元	第 5 份	雞腿堡	果汁	80元	<p>此種做法每份早餐的組合不同，但有兩份的價錢是 80 元，不符合題目的條件「每份最多不可超過 70 元」，視為不正確的組合。</p>
份數別 \ 種類	餐點	飲料	每份價錢																								
第 1 份	三明治	豆漿	50元																								
第 2 份	蘿蔔糕	紅茶	50元																								
第 3 份	蛋餅	奶茶	60元																								
第 4 份	豬排堡	咖啡	80元																								
第 5 份	雞腿堡	果汁	80元																								

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析																														
1	1-B	<table border="1"> <thead> <tr> <th>份數別</th> <th>種類</th> <th>餐點</th> <th>飲料</th> <th>每份價錢</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>第 1 份</td> <td></td> <td>蘿蔔糕</td> <td>奶茶</td> <td>60</td> </tr> <tr> <td>第 2 份</td> <td></td> <td>三明治</td> <td>咖啡</td> <td>70</td> </tr> <tr> <td>第 3 份</td> <td></td> <td>蛋餅</td> <td>豆漿</td> <td>45</td> </tr> <tr> <td>第 4 份</td> <td></td> <td>豬排堡</td> <td>果汁</td> <td>70</td> </tr> <tr> <td>第 5 份</td> <td></td> <td>雞腿堡</td> <td>紅茶</td> <td>65</td> </tr> </tbody> </table> <p> $60+70+45+70+65$ $=310$ $500-310$ $=190$ $A: 310元, 190元$ </p>	份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢	第 1 份		蘿蔔糕	奶茶	60	第 2 份		三明治	咖啡	70	第 3 份		蛋餅	豆漿	45	第 4 份		豬排堡	果汁	70	第 5 份		雞腿堡	紅茶	65	此種做法中，第 5 份組合的價錢應是 75 元，不符合題目的條件「每份最多不可超過 70 元」，視為不正確的組合。
份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢																													
第 1 份		蘿蔔糕	奶茶	60																													
第 2 份		三明治	咖啡	70																													
第 3 份		蛋餅	豆漿	45																													
第 4 份		豬排堡	果汁	70																													
第 5 份		雞腿堡	紅茶	65																													
0	0-B	<table border="1"> <thead> <tr> <th>份數別</th> <th>種類</th> <th>餐點</th> <th>飲料</th> <th>每份價錢</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>第 1 份</td> <td></td> <td>三明治</td> <td>咖啡</td> <td>三=35 咖=35</td> </tr> <tr> <td>第 2 份</td> <td></td> <td>豬排堡</td> <td>果汁</td> <td>豬=45 果=25</td> </tr> <tr> <td>第 3 份</td> <td></td> <td>雞腿堡</td> <td>豆漿</td> <td>豆=15 雞=55</td> </tr> <tr> <td>第 4 份</td> <td></td> <td>果汁</td> <td>豬排堡</td> <td>果=25 豬=45</td> </tr> <tr> <td>第 5 份</td> <td></td> <td>咖啡</td> <td>三明治</td> <td>咖=35 三=35</td> </tr> </tbody> </table>	份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢	第 1 份		三明治	咖啡	三=35 咖=35	第 2 份		豬排堡	果汁	豬=45 果=25	第 3 份		雞腿堡	豆漿	豆=15 雞=55	第 4 份		果汁	豬排堡	果=25 豬=45	第 5 份		咖啡	三明治	咖=35 三=35	此種做法列出的五份組合，其中第 1 份和第 5 份、第 2 份和第 4 份分別相同，不符合題目的條件「每份早餐的組合不同」，視為不正確的組合。
份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢																													
第 1 份		三明治	咖啡	三=35 咖=35																													
第 2 份		豬排堡	果汁	豬=45 果=25																													
第 3 份		雞腿堡	豆漿	豆=15 雞=55																													
第 4 份		果汁	豬排堡	果=25 豬=45																													
第 5 份		咖啡	三明治	咖=35 三=35																													
0	0-B	<table border="1"> <thead> <tr> <th>份數別</th> <th>種類</th> <th>餐點</th> <th>飲料</th> <th>每份價錢</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>第 1 份</td> <td></td> <td>蛋餅</td> <td>咖啡</td> <td>65</td> </tr> <tr> <td>第 2 份</td> <td></td> <td>蘿蔔糕</td> <td>奶茶</td> <td>60</td> </tr> <tr> <td>第 3 份</td> <td></td> <td>蛋餅</td> <td>豆漿</td> <td>45</td> </tr> <tr> <td>第 4 份</td> <td></td> <td>三明治</td> <td>紅茶</td> <td>55</td> </tr> <tr> <td>第 5 份</td> <td></td> <td>蘿蔔糕</td> <td>奶茶</td> <td>60</td> </tr> </tbody> </table> <p> $(65+60)+(45+55)+60$ $=125+100+60$ $=285$ </p> <p> $500-(65+60+45+55+60)$ $=500-285$ $=215$ $A: 285元, 215元$ </p>	份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢	第 1 份		蛋餅	咖啡	65	第 2 份		蘿蔔糕	奶茶	60	第 3 份		蛋餅	豆漿	45	第 4 份		三明治	紅茶	55	第 5 份		蘿蔔糕	奶茶	60	此種做法列出的五份組合，其中第 2 份和第 5 份完全相同，不符合題目的條件「每份早餐的組合不同」，視為不正確的組合。
份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢																													
第 1 份		蛋餅	咖啡	65																													
第 2 份		蘿蔔糕	奶茶	60																													
第 3 份		蛋餅	豆漿	45																													
第 4 份		三明治	紅茶	55																													
第 5 份		蘿蔔糕	奶茶	60																													



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析																																																												
0	0-X	<table border="1"> <thead> <tr> <th>份數別</th> <th>種類</th> <th>餐點</th> <th>飲料</th> <th>每份價錢</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>第 1 份</td> <td></td> <td>三明治</td> <td>奶茶</td> <td>65元</td> </tr> <tr> <td>第 2 份</td> <td></td> <td>蘿蔔糕</td> <td>咖啡</td> <td>65元</td> </tr> <tr> <td>第 3 份</td> <td></td> <td>蛋餅</td> <td>果汁</td> <td>55元</td> </tr> <tr> <td>第 4 份</td> <td></td> <td>豬排堡</td> <td>紅茶</td> <td>65元</td> </tr> <tr> <td>第 5 份</td> <td></td> <td>雞腿堡</td> <td>豆漿</td> <td>70元</td> </tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr> <th>份數別</th> <th>種類</th> <th>餐點</th> <th>飲料</th> <th>每份價錢</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>第 1 份</td> <td></td> <td>豬排堡</td> <td>紅茶</td> <td>65元</td> </tr> <tr> <td>第 2 份</td> <td></td> <td>雞腿堡</td> <td>豆漿</td> <td>70元</td> </tr> <tr> <td>第 3 份</td> <td></td> <td>三明治</td> <td>果汁</td> <td>60元</td> </tr> <tr> <td>第 4 份</td> <td></td> <td>蛋餅</td> <td>咖啡</td> <td>65元</td> </tr> <tr> <td>第 5 份</td> <td></td> <td>蘿蔔糕</td> <td>奶茶</td> <td>60元</td> </tr> </tbody> </table> <p> 1. $\begin{array}{r} 45 \\ +20 \\ \hline 65 \end{array}$ 2. $\begin{array}{r} 55 \\ +15 \\ \hline 70 \end{array}$ 3. $\begin{array}{r} 35 \\ +25 \\ \hline 60 \end{array}$ 4. $\begin{array}{r} 30 \\ +35 \\ \hline 65 \end{array}$ 5. $\begin{array}{r} 30 \\ +30 \\ \hline 60 \end{array}$ </p>	份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢	第 1 份		三明治	奶茶	65元	第 2 份		蘿蔔糕	咖啡	65元	第 3 份		蛋餅	果汁	55元	第 4 份		豬排堡	紅茶	65元	第 5 份		雞腿堡	豆漿	70元	份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢	第 1 份		豬排堡	紅茶	65元	第 2 份		雞腿堡	豆漿	70元	第 3 份		三明治	果汁	60元	第 4 份		蛋餅	咖啡	65元	第 5 份		蘿蔔糕	奶茶	60元	這兩種做法的五份組合皆不相同，每份的價錢也都正確且不超過 70 元，但未依題目的要求算出花費的總金額及找回的錢數，故視為未完整作答，不予給分。
份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢																																																											
第 1 份		三明治	奶茶	65元																																																											
第 2 份		蘿蔔糕	咖啡	65元																																																											
第 3 份		蛋餅	果汁	55元																																																											
第 4 份		豬排堡	紅茶	65元																																																											
第 5 份		雞腿堡	豆漿	70元																																																											
份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢																																																											
第 1 份		豬排堡	紅茶	65元																																																											
第 2 份		雞腿堡	豆漿	70元																																																											
第 3 份		三明治	果汁	60元																																																											
第 4 份		蛋餅	咖啡	65元																																																											
第 5 份		蘿蔔糕	奶茶	60元																																																											
0	0-X	<table border="1"> <thead> <tr> <th>份數別</th> <th>種類</th> <th>餐點</th> <th>飲料</th> <th>每份價錢</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>第 1 份</td> <td></td> <td>三明治</td> <td>奶茶</td> <td>70</td> </tr> <tr> <td>第 2 份</td> <td></td> <td>蘿蔔糕</td> <td>咖啡</td> <td>65</td> </tr> <tr> <td>第 3 份</td> <td></td> <td>蛋餅</td> <td>果汁</td> <td>55</td> </tr> <tr> <td>第 4 份</td> <td></td> <td>豬排堡</td> <td>紅茶</td> <td>65</td> </tr> <tr> <td>第 5 份</td> <td></td> <td>雞腿堡</td> <td>豆漿</td> <td>70</td> </tr> </tbody> </table>	份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢	第 1 份		三明治	奶茶	70	第 2 份		蘿蔔糕	咖啡	65	第 3 份		蛋餅	果汁	55	第 4 份		豬排堡	紅茶	65	第 5 份		雞腿堡	豆漿	70	此種做法的五份組合皆不相同，每份的價錢也都不超過 70 元，但第 1 份的價錢有誤，應為 65 元，再加上未依題目的要求算出花費的總金額及找回的錢數，故視為未完整作答，不予給分。																														
份數別	種類	餐點	飲料	每份價錢																																																											
第 1 份		三明治	奶茶	70																																																											
第 2 份		蘿蔔糕	咖啡	65																																																											
第 3 份		蛋餅	果汁	55																																																											
第 4 份		豬排堡	紅茶	65																																																											
第 5 份		雞腿堡	豆漿	70																																																											

從學生在本題的答題情形來看，學生的表現十分優異，只有不到零點二成的學生完全沒得到分數，約二點五成的學生雖只得到 1 分，但大多數是在計算上出了錯，而非解題有困難，僅有少數對題意不完全了解。由學生在本題的表現，可以看到學生對於生活中熟悉的問題情境，有較好的反應，但還是有部分學生的計算能力需持續加強。

6. 教學建議：

- (1) 多加強與學生生活經驗的連結，可讓學生覺察數學與生活的關連，發現數學在生活中有用。
- (2) 教師在教學中應加強讀懂題意的訓練，使學生有能力區別生活情境和數學問題情境的異同，就會減少類似「餐點和飲料對調就以為是不同組合」、「帶 500 元卻以每份至多 70 元計算找回的錢」等錯誤，也能應用所學的數學解決生活的問題。

(三) 兩步驟四則混合算式的擬題

1. 檢測年度：98 年度

2. 題目：

「請你設計一個數學題目，這個題目可以用「 $15+20\times 4$ 」算出答案。把你設計的題目寫下來。」

3. 評量目的：

本試題主要是希望透過讓學生自己「擬題」的方式，來了解學生是否確實理解加、乘兩步驟的解題方法，也希望能藉此提升孩子的語文能力。

4. 評閱標準：

評閱標準 2 分有 2 類、1 分有 4 類、0 分有 5 類，相關評閱標準與舉隅如下表：

表 2-1-7 98 年度數學學力檢測建構反應題第三題評閱標準

類別	評閱標準 (評閱舉隅)
2-A	順情境布題，先出現 $15\rightarrow 20\rightarrow 4$ ；算式 $15+(20\times 4)$ 。
2-B	部分逆情境布題，先出現 $15\rightarrow 4\rightarrow 20$ ，算式 $15+(20\times 4)$ ；或先出現 20，算式 $20\times 4+15$ 。
1-A	題意不夠完備，例如：少說明 1 包有 20(個)。
1-B	算式對，但情境不合理。
1-C	布題中，部分數字非 15、20、4，已經轉換成相同數字，例如：一盒 20 個，買 4 盒，老闆又送 $\frac{3}{4}$ 盒，共有幾個？
1-X	其他
0-A	空白
0-B	有布題，但算式為 $(15+20)\times 4$ 。
0-C	語意不清或沒有提出要問什麼，算式可能是 $24\times 4+15$ 、 $15+20+20\times 4$ 、 $15+20+4$ 等。
0-D	只有算式，沒有布題。
0-X	其他



5. 評閱結果：

(1) 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-1-8 98 年度數學學力檢測建構反應題第三題評閱結果統計表

得分 類型	0					1				2		小計
	0A	0B	0C	0D	0X	1A	1B	1C	1X	2A	2B	
人數	2	76	16	28	18	12	1	5	2	34	97	291
百分比 (%)	0.69	26.12	5.50	9.62	6.19	4.12	0.34	1.72	0.69	11.68	33.33	
人數	140					20				131		
百分比 (%)	48.11					6.87				45.02		

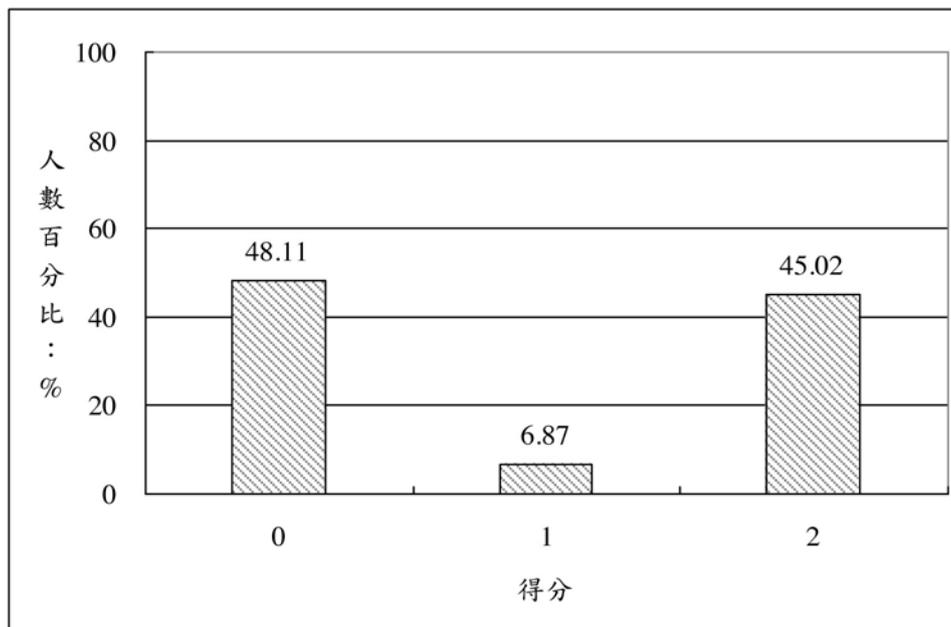


圖 2-1-3 98 年度數學學力檢測建構反應題第三題得分統計圖

由表 2-1-8 可以得知，本試題經評閱後得 2 分情形者有 131 人，占總人數的 45.02%，整體的答對率為四成五。這些得到 2 分的答題類型又分為二種：第一種是順情境布題，布題情境中數字的出現順序與題目上數字出現的順序是一樣的，也就是先出現 15，再出現 20，最後才出現 4；依據此題意，算式應該是 $15 + (20 \times 4)$ ，此種解法的學生有 34 人，占總人數的 11.68%。第二種是部分逆情境布題，布題情境中數字的出現順序與題目上數字出現的順序有些不一樣，有些學生先出現 15，再出現 4，最後才出現 20，依據此題意，算式應該也是 $15 + (20 \times 4)$ ；有些學生則先出現 20，再出現 4，最後才出現 15，此種題型的算式應該是 $20 \times 4 + 15$ ，此種解法的學生有 97 人，占總人數的 33.33%。

評閱得到 1 分的有 20 人，占總人數的 6.87%。得到 1 分的答題類型又分為四種：第一種是題意不夠完備，例如：少說明 1 包有 20(個)，此種類型的學生有 12 人，占總人數的 4.12%；第二種是算式對，但情境不合理，此種類型的學生僅有 1 人；第三種是布題中，部分數字非單純的是 15、20、4，而是經過轉換，例如：一盒 20 個，買 4 盒，老闆又送 $\frac{3}{4}$ 盒，共有幾個？該題中並沒有出現所要求的 15 這個數字，而 15 這個數字是由 $20 \times \frac{3}{4}$ 轉換得來的，此種類型的學生有 5 人，占總人數的 1.72%；第四種是其他答題類型，此種類型的學生有 2 人，占總人數的 0.69%。

得到 0 分的有 140 人，占總人數的 48.11%。得到 0 分的答題類型又分為五種：第一種是該題的答案卷空白，沒有任何作答的痕跡，此種類型的學生僅有 2 人；第二種是有布題，但依據其題意，算式應該是 $(15+20) \times 4$ ，此種類型的學生有 76 人，占總人數的 26.12%；第三種是語意不清或是沒有提出要問什麼，依據其題意，算式可能是 $24 \times 4 + 15$ 、 $15 + 20 + 20 \times 4$ 或 $15 + 20 + 4$ 等，此種類型的學生有 16 人，占了總人數的 5.5%；第四種是只有寫出算式，沒有布題，此種類型的學生有 28 人，占總人數的 9.62%；第五種有許多不同的布題類型，有些學生只有畫圖，沒有寫任何文字，不知他要問什麼，有些學生布題上出現的數字與題目上所要求的數字不同，有些學生不知所云...等，此種類型的學生有 18 人，占了總人數的 6.19%。

(2) 答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-1-9 98 年度數學學力檢測建構反應題第三題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	一盒巧克力 15 元，一盒餅乾 20 元，媽媽買一盒巧克力和四盒餅乾，共要多少元？	①布題情境中數字出現的順序與題目上數字出現的順序完全一樣，先出現 15，再出現 20，最後才出現 4。 ②此布題是經常出現的買賣付錢的情境。
2	2-A	小明有 15 顆彈珠，弟弟有 20 顆，哥哥的彈珠是弟弟的 4 倍，請問，小明和哥哥一共有幾顆彈珠？ $15 + 20 \times 4$ $= 15 + 80$ $= 95$ A: 95 顆	①布題情境中數字出現的順序與題目上數字出現的順序完全一樣，先出現 15，再出現 20，最後才出現 4。 ②此題是倍數問題的情境。



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-B	<p>小明原有15元,後來爸爸又給小明4個20元,請問小明有多少錢?</p> $15 + 20 \times 4$ $= 15 + 80$ $= 95$ <p style="text-align: right;">A=95元</p>	<p>①布題情境中數字出現的順序與題目上數字出現的順序有些不一樣,先出現15,再出現4,最後才出現20。</p> <p>②此種類型也是日常生活中常出現的以「元」為單位的問題。</p>
2	2-B	<p>Mimi商店正在大特價,原價35元的超級三明治特價20元,另外在活動期間只要加15元即可有一杯價值60元的熱可可。小安安買了4個超級三明治,還加買了一杯熱可可,請問小安安要付多少錢?</p>	<p>①布題情境中數字出現的順序與題目上數字出現的順序有些不一樣,先出現20,再出現15,最後才出現4。</p> <p>②此題的算式應該是「$20 \times 4 + 15$」。</p> <p>③該生的布題能與日常生活連結,其中也出現了一些多餘的資訊,敘述有條不紊,且所問的問題符合題目的要求,是很棒的題目。</p>
2	2-B	<p>小美的體重是20公斤,哥哥的體重是小美的4倍,小寶寶的體重是15公斤,媽媽的體重是哥哥加小寶寶的體重,媽媽有多重?</p> $15 + 20 \times 4$ $= 15 + 80$ $= 95 \text{ kg}$ <p style="text-align: right;">A: 媽媽重95公斤。</p>	<p>①布題情境中數字出現的順序與題目上數字出現的順序有些不一樣,先出現20,再出現4,最後才出現15。</p> <p>②此題的算式應該是「$20 \times 4 + 15$」。</p> <p>③用體重來布題,也是與生活連結的題目,且文字流暢,也是很棒的題目。</p>
1	1-A	<p>一盒蘋果20顆,王媽媽買了4箱回家,隔壁的李大伯又送給王媽媽15顆蘋果,那麼王媽媽一共有多少顆蘋果?</p>	<p>此布題原來是以「盒」為單位,後面卻說買了4「箱」,單位不小心弄錯了,因此只給1分。</p>

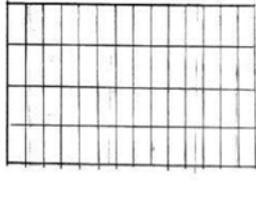
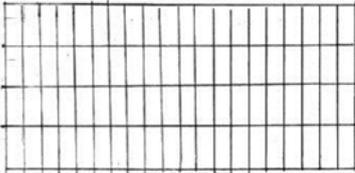
得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
1	1-A	有2塊地，第一塊的面積是15平方公里，第二塊地的面積由4塊20平方公里的地組成的，2塊地和起來是多少平方公里？	<p>①此布題中「第二塊地的面積是由4塊20平方公里的地組成的」，這句話的題意不清楚，會讓人誤以為第二塊地的面積只有0平方公里，因此只給1分。</p> <p>②如果能改為「是由4塊每塊20平方公里的地組成的」，則題意會更清楚。</p>
1	1-B	甲一分鐘放了15個屁，乙一分鐘放20個，如果乙放四分鐘，甲放一分鐘，共放了多少個屁？	<p>此布題的算式的確可以用「$20 \times 4 + 15$」來解題，但是情境不合裡，因為人幾乎不可能連續放四分鐘的屁，且每分鐘放屁的次數也不可能一樣多。</p>
1	1-C	小明有15枝筆，現在老師和3位小朋友再各送小明20枝筆，請問小明現在共有幾枝筆？	<p>①此布題的算式應該是「$15 + 20 \times (1 + 3)$」，雖然算出來的答案和題目「$15 + 20 \times 4$」的答案一樣，但是不符合題目的原意。</p> <p>②此布題沒出現該有的數字「4」，「4」這個數字是由$(1 + 3)$轉化而成的。</p>
1	1-C	一盒水果有20個，哥哥買了4盒，老闆又送他 $\frac{3}{4}$ 盒的水果，請問哥哥共有幾個水果？	<p>①此布題的算式應該是「$20 \times 4 + 20 \times \frac{3}{4}$」，雖然算出來的答案和題目「$15 + 20 \times 4$」的答案一樣，但是不符合題目的原意。</p> <p>②此布題沒出現該有的數字「15」，「15」這個數字是由$20 \times \frac{3}{4}$轉化而成的。</p>
1	1-X	1小箱蘋果15顆，1大箱蘋果20顆，請問1小箱蘋果和4大箱蘋果，總共有幾顆蘋果？	<p>此布題只差了一個字，最後的問題中4小箱，應該是4大箱才對，如果按照此布題算式應該是$15 \times (4 + 1)$，明顯和題目中「15</p>



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
			+20×4」的答案不一樣，本來應該算全錯，可以給0分，但是我們認為該生應該是會的，只是一時的筆誤，因此給1分。
1	1-X	有20道菜，每一道菜有4份，因為小明考試考滿分，媽媽很高興，所以多煮15道菜，只有一份，媽媽一共煮幾份菜？	此布題第二行提到「多煮15道菜，只有一份」，此種說法不夠清楚，應該要說「多煮15道菜，每道菜都只煮一份」，如此題目才算是完整的。
0	0-B	甲數是15，乙數是20，丙數是甲和乙的和的4倍，請問丙數是多少？	①此布題的式子應該是(15+20)×4，與題目所要求的式子「15+20×4」的答案是不一樣的。 ②這種布題的學生，對於四則混合計算中的先算乘除再算加減的規則還不熟悉。
0	0-B	有二個正方形邊長是15和20公分，請用一個算式算出這兩個的周長。 $(15+20) \times 4$ $= 35 \times 4$ $= 140$ A: 140 cm	①此布題的式子應該是(15+20)×4，與題目所要求的式子「15+20×4」的答案是不一樣的。 ②這種布題的學生，對於四則混合計算中的先算乘除再算加減的規則還不熟悉。
0	0-B	有一包糖果，有15顆牛奶糖，有20顆巧克力，媽媽買了4包，請問有幾顆糖果？ $15+20 \times 4$ $= 35 \times 4$ $= 140$ A: 140顆	①從該生的算式中，很顯然的，對於四則混合運算中的先算乘除再算加減的規則不了解，以為是由左而右計算。 ②此布題的式子應該是(15+20)×4，與所要求的算式「15+20×4」不符。
0	0-C	A有15顆糖，B有20顆糖，C的糖是B的4倍，請問3者的糖果總數是多少？	該生的題目算式應該是15+20+20×4，與所要求的算式不符。

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-C	<p>把十五乘六十五答案就跟上面的一樣了。</p> $15 \times 6 = 90$ $90 + 5 = 95$	<p>① 該生對於「設計一個數學題目」的意思不了解。</p> <p>② 該生以為是設計一個算式，使這個算式算出來的答案和「$15 + 20 \times 4$」的答案一樣。</p>
0	0-D	$20 \times 4 + 15 = 95$ $A: 95$	<p>① 該生沒有布題，只是算出題目中式子的正確答案。</p> <p>② 這類型的學生可能不了解「設計一個數學題目」的意思。</p>
0	0-D	$15 + (10 \times 8)$ $= 95$	<p>① 該生不僅沒有布題，更是改變題目中的式子，把「20×4」改成「10×8」，再算出正確的答案。</p> <p>② 這類型的學生可能不了解「設計一個數學題目」的意思。</p>
0	0-X	<p>小白的媽媽要小中馬去市場買 糖果，小白的媽媽有15元，小中的媽媽有20元， 她們兩個各買四項菜，一共是幾元？</p> $(15 + 20) \times 4$ $= 35 \times 4$ $= 140$ $\begin{array}{r} 35 \\ \times 4 \\ \hline 140 \end{array}$ $A: 140元$	<p>此布題有下面幾點錯誤之處：</p> <p>① 第一行的「要」應該改成「和」。</p> <p>② 所問的問題是無解的，因為無法從題目中的已知事項算出解答。</p> <p>③ 此類型的學生語文程度有待加強。</p>
0	0-X	<p>老師有15顆軟糖和20根棒棒糖要 給四位小朋友，每人共可分到多少 糖果。</p>	<p>① 此布題的算式應該是 $(15 + 20) \div 4$</p> <p>② 該生以為「每人共可分到多少糖果」是用乘法算出答案。</p>



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-X	<p>阿扁有15個士兵,馬總統有20個士兵,但馬總統又 招兵買馬,他的士兵多4倍,請問阿扁和馬總統 總共有多少士兵?</p> $15 + 20 \times 4 = 95$ <p>A: 95個</p>	<p>①此學生忘了馬總統原來有 20 個士兵，這 20 人也要算，因此這個布題的算式應該是「$15 + 20 + 20 \times 4$」並非「$15 + 20 \times 4$」。</p> <p>②該生很有創意，以上一任及現任總統當布題的主角人物。</p>
0	0-X	<p>紅豆糕</p>  <p>綠豆糕</p> 	<p>①此學生只出現圖示，完全沒有配合文字說明，讓人無法了解他要表示的是什麼。</p> <p>②該生可能不了解題意。</p>

從學生在本題的答題情形來看，我們比較可喜的是發現一些學生很有創意，出現的題目類型非常多樣，有常見的買賣、年齡、體重、倍數、面積及周長...等問題，許多問題都是孩子的日常生活經驗，有些學生語文程度很好，敘述非常流暢。但是整體的答對率偏低，得到 0 分的學生(48.11%)比得到 2 分的學生(45.02%)還要多，換句話說有將近一半的學生寫錯了，歸納其原因有下列幾點：

- ①我們發現得到 0 分的 140 人裡面，有超過一半以上的學生(76 人)布題的算式應該是用 $(15 + 20) \times 4$ 才能算出正確的答案，而非題目所要求的 $15 + 20 \times 4$ 的算式，而這些人又占總人數的 26.12%，換句話說有二成六的學生對於四則混合運算的規則仍然不清楚，誤以為所有的計算題都是由左而右計算。
- ②我們也發現布題敘述不夠完整的學生約有一成，還有一成的學生只寫出算式的計算過程或答案，並沒有寫出文字布題，很顯然的這類型的學生不懂得什麼叫做「設計一個數學題目」，這些學生的語文能力有待提升。
- ③這題的答對率偏低，我們發現這題是屬於非例行性的問題，平常教科書或課本很少出現讓學生自己就一個算式來「擬題」的題目，也許大部分的老師在課堂上也很少使用此種方法，因此學生對於這種題目就答得比較不理想。

6.教學建議：

(1) 下面四則混合計算的規則宜讓孩子熟練。

①由左而右計算：一個算式裡，若只有加減或只有乘除，就由左而右依照順序計算。

②先乘除，後加減：一個算式裡，若有加減，也有乘除，則乘除要先算，最後再算加減。

③有括號，由括號先算：括號裡也要先算乘除，後算加減。

(2) 平日教學中或回家作業可以提供當天所教的算式類型，讓孩子根據該算式自己設計一些題目，「擬題」不但可以提升孩子的語文能力，更可以訓練孩子的思考及想像力，且當孩子會依據算式設計出正確的題目時，就表示孩子確實理解也會算該算式了。

(3) 在教應用題解題時，一定要讓孩子確實讀懂題目，指導孩子分析題意，了解題目中的已知條件有哪些及最後題目要問的是什麼，如此可以讓孩子知道一個完整的題目，要包含哪些要項，對於孩子「擬題」能力的提升將有幫助。

(4) 多提供一些非例行性的題目讓學生解題，訓練學生的思考、推理與解題的能力。



(四) 倍數的應用

1. 檢測年度：96 年度

2. 題目：

「一包糖果比 200 顆多，比 300 顆少，8 顆裝一小袋剛好可以裝完，沒有剩下。如果 10 顆裝一小袋，也都剛好可以裝完，沒有剩下。這包糖果可能有幾顆？把可能的答案都寫出來，也把你的做法寫下來。」

3. 評量目的：

本試題主要評量學生是否理解公倍數的意義，並能應用於解決問題。

4. 評閱標準：

評閱標準 2 級分有 2 類、1 級分有 4 類、0 級分有 5 類，相關評閱標準如下表：

表 2-1-10 96 年度數學學力檢測建構反應題第四題評閱標準

類別	評閱標準
2-A	利用最小公倍數，找出正確答案
2-B	利用列舉法，找出正確答案
1-A	利用最小公倍數找出正確答案，但答案多了“200”
1-B	利用列舉法找出正確答案，但答案多了“200”
1-C	答案正確但未清楚表示解法
1-D	多了 200，且未清楚表示解法
0-A	空白
0-B	公倍數算錯
0-C	只考慮 8 或 10
0-D	隨意選用問題中的數字解題
0-X	其他

5. 評閱結果：

(1) 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-1-11 96 年度數學學力檢測建構反應題第四題評閱結果統計表

得分	0					1				2		小計
	0A	0B	0C	0D	0X	1A	1B	1C	1D	2A	2B	
人數	5	7	4	3	55	56	12	6	3	133	11	295
百分比(%)	1.69	2.37	1.36	1.02	18.64	18.98	4.07	2.03	1.02	45.08	2.73	
人數	74					77				144		
百分比(%)	25.08					26.10				48.81		

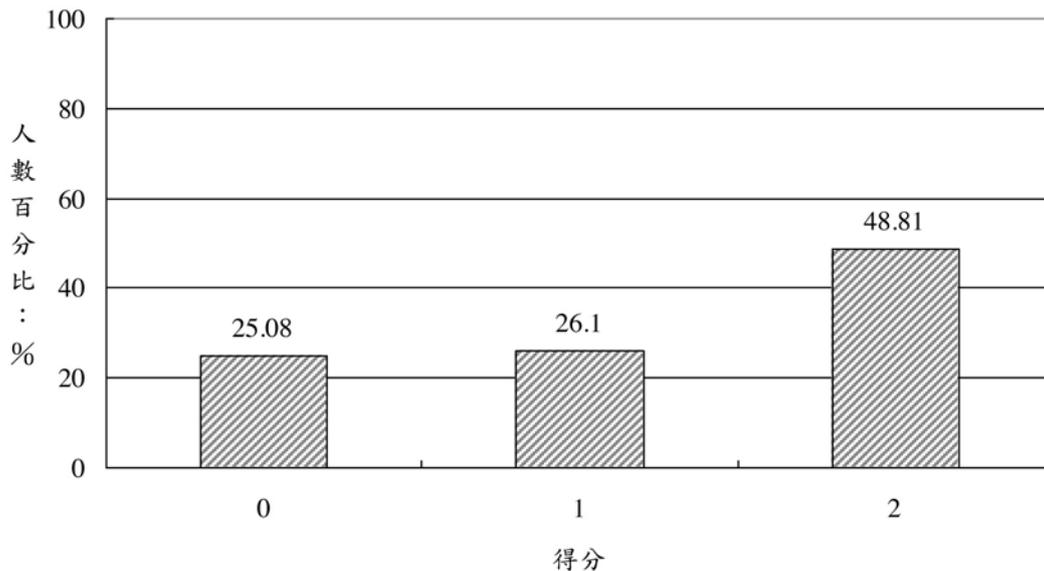


圖 2-1-4 96 年度數學學力檢測建構反應題第四題得分統計圖

由表 2-1-11 可以得知，本試題經評閱後得 2 級分的有 144 人，占總人數的 48.81%。整體的答對率為接近五成。得到 2 級分的答題類型又分兩種：一種是能利用最小公倍數找出正確答案，這也是最符合當初出題的主要目的。能用此方法做答的有 133 人，占全體答對人數的 92.36%；另一種是利用列舉法找出公倍數，有 11 人，佔總人數的 7.64%。

得到 1 級分的有 77 人，占總人數的 26.10%。大部分學生的答案幾乎都是多寫了 200，表示這些學生不知道或未注意到比 200 大的數中，不應該包括 200。得到 1 分的學生中有 56 人能利用最小公倍數找出正確答案，和得分 2 分中會利用最小公倍數求解的學生，合計總共有 189 人，占全部 295 的受試人數的 64%，換句話說，還有 36% 的學生不會利用最小公倍數找出正確答案。

得到 0 分的有 74 人，占總人數的 25.08%；其中完全空白的有 5 人，占總人數的 1.69%。有 7 人(2.37%)公倍數算錯；有 4 人(1.36%)只算 8 的倍數，或只算 10 的倍數；有 3 人(1.02%)是隨意選用題目中的數字來解答；用其他做法但答案寫錯的有 55 人，占總人數的 18.64%。

(2) 答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-1-12 96 年度數學學力檢測建構反應題第四題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	$\begin{array}{r} 2 \overline{) 18 \ 10} \\ \underline{4 \ 5} \\ 2 \times 4 \times 5 = 40 \end{array}$ $\begin{array}{l} 40 \times 1 = 40 \\ 40 \times 2 = 80 \\ 40 \times 3 = 120 \\ 40 \times 4 = 160 \\ 40 \times 5 = 200 \\ 40 \times 6 = 240 \\ 40 \times 7 = 280 \\ 40 \times 8 = 320 \end{array}$ <p>A = 240, 280 類</p>	利用短除法先找出 8 和 10 的最小公倍數 40，再從 40 的 1 倍開始，依次用乘法找出 40 的倍數，直到符合題目的要求為止。



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	$\begin{array}{r} 2 \overline{) 8, 10} \\ \underline{4} \\ 4 \\ \underline{4} \\ 0 \end{array}$ $2 \times 4 \times 5 = 40$ $40 \times 1 = 40$ $40 \times 2 = 80$ $40 \times 3 = 120$ $40 \times 4 = 160$ $40 \times 5 = 200$ $40 \times 6 = 240$ $40 \times 7 = 280$ <p>8顆或10顆裝都裝不了一袋， 那找8和10的最小公倍數，再 慢慢算用40乘到比200多 然後比300少就OK了 A: 240顆、280顆</p>	
2	2-A	$\begin{array}{r} 2 \overline{) 8, 10} \\ \underline{4} \\ 4 \\ \underline{4} \\ 0 \end{array}$ $2 \times 4 \times 5 = 40$ $40 \times 6 = 240$ $40 \times 7 = 280$ <p>A: >40顆或 >80顆</p>	利用短除法先找出8和10的最小公倍數40，並且很清楚的知道比200多，比300少的數只有40的6倍、40的7倍，因此直接用40乘以6、乘以7就得到答案。
2	2-A	$[10, 8] = 40$ $40 \times 5 = 200 \text{ (X) 要比 } 200 \text{ 多}$ $40 \times 6 = 240$ $40 \times 7 = 280$ $40 \times 8 = 320 \text{ (X) 要比 } 300 \text{ 少}$ <p>A: 240顆或 280顆</p>	找出8和10的最小公倍數40，知道比200多，比300少，40的5倍200、40的8倍320並不是所要的答案，所以只有40的6倍、7倍才是所要的答案。 此種學生可能提早學習，因為在小學裡不會用 $[10, 8] = 40$ 來表示10和8的最小公倍數是40。
2	2-A	$\begin{array}{r} 2 \overline{) 10, 8} \\ \underline{5} \\ 5 \\ \underline{5} \\ 0 \end{array}$ $2 \times 5 \times 4 = 40$ $200 \div 40 = 5$ $40 \times 6 = 240$ $240 + 40 = 280$ <p>A: 240、280顆</p>	利用短除法先找出8和10的最小公倍數40，再找出40的倍數中比200多，最小的數是40的6倍240，再用240加上40等於280。
2	2-A	$\begin{array}{r} 2 \overline{) 8, 10} \\ \underline{4} \\ 4 \\ \underline{4} \\ 0 \end{array}$ $2 \times 4 \times 5 = 40$ $40 \overline{) 300} \\ \underline{280} \\ 20$ $\begin{array}{r} 40 \\ \times 7 \\ \hline 280 \end{array}$ $\begin{array}{r} 280 \\ - 40 \\ \hline 240 \end{array}$ $\begin{array}{r} 240 \\ - 40 \\ \hline 200 \end{array}$ <p>200 = 200</p> <p>做法: 先找出8和10的最小公倍數，再用300去除它，最後慢慢減， 这样才能找出 <300 > 200 的8和10的最小公倍數了。</p> <p>A: 280顆、240顆</p>	利用短除法先找出8和10的最小公倍數40，再找出40的倍數中比200多，比300少，其中最大的數是40的7倍280，再用280減掉40等於240，並且清楚的知道200並沒有比200大，所以200並非答案。

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	$\begin{array}{r} 2 \overline{)1108} \\ \underline{54} \\ 2 \times 5 \times 4 = 40 \end{array}$ <p>條件: $201 \sim 299$</p> $\begin{array}{l} 299 \div 40 = 7 \dots 19 \\ 40 \times 7 = 280 (\checkmark) \\ 40 \times 6 = 240 (\checkmark) \\ 40 \times 5 = 200 (\times) \\ 40 \times 8 = 320 (\times) \end{array}$ <p>A: 240, 280 類</p>	<p>利用短除法先找出 8 和 10 的最小公倍數 40，並且很清楚的知道比 200 多、比 300 少的數是從 201 到 299，先算出介於此兩數間 40 的倍數，40 的 7 倍 280，40 的 6 倍 240。</p>
2	2-B	$\begin{array}{l} 200 \div 8 = 25 \\ 8 \times 26 = 208 \\ 8 \times 27 = 216 \\ 8 \times 28 = 224 \\ 8 \times 29 = 232 \\ 8 \times 30 = 240 \\ 8 \times 31 = 248 \\ 8 \times 32 = 256 \\ 8 \times 33 = 264 \\ 8 \times 34 = 272 \\ 8 \times 35 = 280 \\ 8 \times 36 = 288 \\ 8 \times 37 = 296 \end{array}$ $\begin{array}{l} 200 \div 10 = 20 \\ 10 \times 21 = 210 \\ 10 \times 22 = 220 \\ 10 \times 23 = 230 \\ 10 \times 24 = 240 \\ 10 \times 25 = 250 \\ 10 \times 26 = 260 \\ 10 \times 27 = 270 \\ 10 \times 28 = 280 \\ 10 \times 29 = 290 \end{array}$ $\begin{array}{l} 240 \div 8 = 30 \\ 240 \div 10 = 24 \\ 280 \div 8 = 35 \\ 280 \div 10 = 28 \end{array}$ <p>A: 240, 280 類</p>	<p>先從 8 的 26 倍開始逐一算到 8 的 37 倍，再從 10 的 21 倍逐一算到 10 的 30 倍，最後找出 200~300 之間 8 和 10 的公倍數。</p> <p>左邊解法 10×29 及 10×30 的答案有誤。</p>
2	2-B	<p>200~300 的倍數</p> $\begin{array}{l} 8 \times 30 = 240 \\ 10 \times 21 = 210 \\ 8 \times 32 = 256, 256, 264, 272, 280, 288, 296 \end{array}$ $\begin{array}{l} 10 \times 29 = 290, 290, 230, 240, 250, 260, 270, 280, 290 \end{array}$ <p>A: 240 類或 280 類</p>	<p>先從 8 的 30 倍開始算到 8 的 37 倍，再從 10 的 21 倍逐一算到 10 的 29 倍，最後找出 200~300 之間 8 和 10 的公倍數。</p>
2	2-B	$\begin{array}{l} 8: 208, 216, 224, 232, 240, 248, 256, 264, 272, 280, 288, 296 \\ 10: 200, 210, 220, 230, 240, 250, 260, 270, 280, 290 \end{array}$ <p>A: 可能有 240 類或 280 類</p>	<p>先從 8 的 26 倍開始算到 8 的 35 倍，再從 10 的 20 倍逐一算到 10 的 29 倍，最後找出 200~300 之間 8 和 10 的公倍數。</p>
1	1-A	$\begin{array}{r} 2 \overline{)810} \\ \underline{45} \\ 2 \times 4 \times 5 = 40 \end{array}$ $\begin{array}{l} 40 \times 1 = 40 \\ 40 \times 2 = 80 \\ 40 \times 3 = 120 \\ 40 \times 4 = 160 \\ 40 \times 5 = 200 \\ 40 \times 6 = 240 \\ 40 \times 7 = 280 \end{array}$ <p>A: 200, 240, 280 類</p>	<p>利用短除法先找出 8 和 10 的最小公倍數 40，再從 40 的 1 倍開始，依次用乘法找出 300 以內 40 的所有倍數，最後找出 200~300 的數中 40 的倍數，但不知道比 200 大，200 不該包含其中。</p>
1	1-A	$\begin{array}{r} 2 \overline{)810} \\ \underline{45} \\ 2 \times 4 \times 5 = 40 \end{array}$ $\begin{array}{l} 40 \times 5 = 200 \\ 40 \times 6 = 240 \\ 40 \times 7 = 280 \end{array}$ <p>A: 200, 240 或 280 類</p>	<p>利用短除法先找出 8 和 10 的最小公倍數 40，再從 40 的 5 倍開始，依次用乘法找出 300 以內，40 的所有倍數，但不知道比 200 大，200 不該包含其中。</p>



得分	類型	解題類型舉隅	解題 (錯誤) 類型分析
1	1-B	$\begin{array}{l} 8 \times 25 = 200 \\ 8 \times 26 = 208 \\ 8 \times 27 = 216 \\ 8 \times 28 = 224 \\ 8 \times 29 = 232 \\ 8 \times 30 = 240 \\ 8 \times 31 = 248 \\ 8 \times 32 = 256 \\ 8 \times 33 = 264 \\ 8 \times 34 = 272 \\ 8 \times 35 = 280 \\ 8 \times 36 = 288 \\ 8 \times 37 = 296 \end{array}$ $\begin{array}{l} 200 \div 10 = 20 \dots 0 \\ 208 \div 10 = 20 \dots 8 \\ 216 \div 10 = 21 \dots 6 \\ 224 \div 10 = 22 \dots 4 \\ 232 \div 10 = 23 \dots 2 \\ 240 \div 10 = 24 \dots 0 \\ 248 \div 10 = 24 \dots 8 \\ 256 \div 10 = 25 \dots 6 \\ 264 \div 10 = 26 \dots 4 \\ 272 \div 10 = 27 \dots 2 \\ 280 \div 10 = 28 \dots 0 \\ 288 \div 10 = 28 \dots 8 \end{array}$ <p>A: 可能有 200 顆 240 顆 280 顆</p>	<p>先從 8 的 25 倍開始逐一算到 8 的 37 倍，再逐一檢驗這些 8 的倍數是否也是 10 的倍數，最後找出 200~300 之間 8 和 10 的公倍數。但不知道比 200 大，200 不該包含其中。</p>
1	1-B	$\begin{array}{l} \checkmark 10 \times 20 = 200 \\ \times 10 \times 21 = 210 \\ \times 10 \times 22 = 220 \\ \checkmark 10 \times 24 = 240 \\ \times 10 \times 25 = 250 \\ \times 10 \times 26 = 260 \\ \times 10 \times 27 = 270 \\ \checkmark 10 \times 28 = 280 \\ \times 10 \times 29 = 290 \end{array}$ $\begin{array}{l} \checkmark 8 \times 30 = 240 \\ \checkmark 8 \times 35 = 280 \\ \checkmark 8 \times 25 = 200 \end{array}$ <p>A: 200, 240, 280 顆</p>	<p>先從 10 的 20 倍開始逐一算到 10 的 29 倍，再從這些 10 的倍數中，找到 200、240、280 也是 8 的倍數。但不知道比 200 大，200 不該包含其中。</p>
1	1-B	$\begin{array}{l} 8 \times 25 = 200 \\ 8 \times 30 = 240 \\ 10 \times 20 = 200 \\ 10 \times 24 = 240 \\ 10 \times 28 = 280 \end{array}$ <p>先算出 8 的倍數中比 200 大也最接近 200 的，再算出小於 300 也最接近 300 的，之後再算出所有可能的數，最後再算出這些數可以整除 10 的數。</p>	<p>解法參閱左邊學生的說明，只是答案中多出了 200。</p>
1	1-C	$300 > \frac{240}{10} > 200$ $\begin{array}{l} ① 240 \div 8 = 30 \\ 240 \div 10 = 24 \\ ② 280 \div 8 = 35 \\ 280 \div 10 = 28 \end{array}$ <p>A: 這題可能有 140 顆 1 次數</p>	<p>此種算法的學生知道介於 200 及 300 之間可以被 8 整除，也可以被 10 整除的數只有 240 和 280。雖然答案正確，但是沒能清楚說明解法 (為什麼只有 240 和 280 可以被 8 和 10 整除)。</p>
1	1-D	$\begin{array}{l} 200 \div 10 = 20 \\ 200 \div 8 = 25 \\ 240 \div 10 = 24 \\ 240 \div 8 = 30 \\ 280 \div 10 = 28 \\ 280 \div 8 = 35 \end{array}$ <p>A: 200、240、280 顆</p>	<p>此種算法的學生知道介於 200 及 300 之間可以被 8 整除，也可以被 10 整除的數有 200、240 和 280。答案多了 200，也沒能清楚說明解法 (為什麼只有 200、240 和 280 可以被 8 和 10 整除)。</p>
0	0-B	$\begin{array}{r} 2 \overline{) 8.10} \\ \underline{4.5} \\ 2 \times 4 \times 5 = 16 \end{array}$ $\begin{array}{l} 200 + 16 = 216 \\ 200 + 16 \times 2 = 232 \\ 200 + 16 \times 3 = 248 \\ 200 + 16 \times 4 = 264 \\ 200 + 16 \times 5 = 280 \end{array}$ <p>A: 280 顆</p>	<p>此類的學生，知道先用短除法算 8 和 10 的公倍數，公倍數的算法雖然正確，但可惜最後 $2 \times 4 \times 5$ 的乘法計算錯誤。</p>

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-B	$\begin{array}{r} 2 \times 5 \times 4 = 40 \\ 14 \times 10 = 140 \\ 14 \times 11 = 154 \\ 14 \times 12 = 168 \\ 14 \times 13 = 182 \\ 14 \times 14 = 196 \\ 14 \times 15 = 210 \\ 14 \times 16 = 224 \\ 14 \times 17 = 238 \\ 14 \times 18 = 252 \\ 14 \times 19 = 266 \\ 14 \times 20 = 280 \\ 14 \times 21 = 294 \\ 14 \times 22 = 308 \end{array}$ <p>$A: 10, 24, 28, 252, 266, 280, 294.$</p>	<p>此類的學生，知道先用短除法算 8 和 10 的公倍數，公倍數的算法雖然正確，但可惜最後 $2 \times 4 \times 5$ 的乘法計算錯誤。</p> <p>答案除了 280 以外，其餘的都不對。</p>
0	0-C	$\begin{array}{l} 8 \times 10 = 80 \\ 8 \times 25 = 200 \\ 8 \times 26 = 208 \\ 8 \times 27 = 216 \\ 8 \times 28 = 224 \\ 8 \times 29 = 232 \\ 8 \times 30 = 240 \\ 8 \times 31 = 248 \\ 8 \times 32 = 256 \\ 8 \times 33 = 264 \\ 8 \times 34 = 272 \\ 8 \times 35 = 280 \\ 8 \times 36 = 288 \\ 8 \times 37 = 296 \end{array}$ <p>$A: 200, 208, 216, 224, 232, 240, 248, 256, 264, 272, 280, 288, 296$ 等類</p>	<p>此類的學生，只用列舉法算出 200~300 之間 8 的倍數，沒有考慮到 10 的倍數。</p>
0	0-C	$\begin{array}{l} 240, 280 \\ 210 \div 8 = 26 \dots 2 \\ 220 \div 8 = 27 \dots 4 \\ 230 \div 8 = 28 \dots 6 \\ 240 \div 8 = 29 \\ 250 \div 8 = 29 \dots 2 \\ 260 \div 8 = 29 \dots 4 \\ 270 \div 8 = 29 \dots 6 \\ 280 \div 8 = 30 \\ 290 \div 8 = 31 \dots 2 \end{array}$	<p>此種解法的學生應該知道 200 及 300 之間 10 的倍數，再用這些 10 的倍數被 8 除，能整除的有 240、280，就是答案，雖然答案正確，但是在計算過程中，有多處的除法是錯誤的，因此不給分。</p>
0	0-C	$\begin{array}{lll} 8 \times 1 = 8 & 8 \times 16 = 128 & 8 \times 30 = 240 \\ 8 \times 2 = 16 & 8 \times 17 = 136 & 8 \times 31 = 248 \\ 8 \times 3 = 24 & 8 \times 18 = 144 & 8 \times 32 = 256 \\ 8 \times 4 = 32 & 8 \times 19 = 152 & 8 \times 33 = 264 \\ 8 \times 5 = 40 & 8 \times 20 = 160 & 8 \times 34 = 272 \\ 8 \times 6 = 48 & 8 \times 21 = 168 & 8 \times 35 = 280 \\ 8 \times 7 = 56 & 8 \times 22 = 176 & 8 \times 36 = 288 \\ 8 \times 8 = 64 & 8 \times 23 = 184 & 8 \times 37 = 296 \\ 8 \times 9 = 72 & 8 \times 24 = 192 & \\ 8 \times 10 = 80 & 8 \times 25 = 200 & \\ 8 \times 11 = 88 & 8 \times 26 = 208 & \\ 8 \times 12 = 96 & 8 \times 27 = 216 & \\ 8 \times 13 = 104 & 8 \times 28 = 224 & \\ 8 \times 14 = 112 & 8 \times 29 = 232 & \end{array}$ <p>$A: 200, 208, 216, 224, 232, 240, 248, 256, 264, 272, 280, 288, 296$</p>	<p>此類的學生只考慮到 8 的倍數，從 8 的 1 倍開始，算到 8 的 37 倍，再從中選出在 200~300 之間所有 8 的倍數，並沒有考慮到 10 的倍數。</p>
0	0-D	$\begin{array}{r} 300 \\ - 200 \\ \hline 100 \end{array} \quad \begin{array}{r} 100 \\ + 8 \\ \hline 108 \end{array} \quad \begin{array}{r} 108 \\ + 10 \\ \hline 118 \end{array}$ <p>$A: 118$</p>	<p>此類的學生，把題目中所給的數字 200、300、8 和 10 都用上了，利用這 4 個數字隨意加減。</p>



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-X	200 240 280 <p>用 200 進以 8 在把答案去減 10</p> $A: 200, 240, 280$	此種做法，雖然答案 240、280 正確，只是多寫了一個 200，但是從他的解題說明中發現他並不知道正確的解題方式。
0	0-X	$2 \overline{) 8, 10}$ 45 $2 \times 4 \times 5 = 40$ $40 \times 5 = 200$ $40 \times 7 = 280$ <p>A 280 果頁</p>	此種做法能用短除法正確的算出 8 和 10 的最小公倍數 40，也知道找出介於 200~300 之間 40 的倍數，但是忘了 40 的 6 倍 240 也是合理的答案。

從學生在本題的答題情形來看，將近六成四的學生能夠利用最小公倍數求解，約二成五的學生解題錯誤，從答錯的學生的解題表現可以看出有的學生不理解題意、有的無法運用公倍數的意義求解、有的沒有注意到比 200 多是不包括 200 的意思等。

6. 教學建議：

建議教師進行教學時仍應安排適當的問題情境，讓學生理解公倍數的意義，使能透過對問題情境的理解，應用公倍數的概念求解，無論學生採取利用找到最小公倍數或是列舉法找到公倍數的方式得解，皆然。此外發現有些學生對於「比...大」的意義疏忽注意，教師在進行數的大小比較教學時，強調比 A 大，則不包括 A 在內；比 B 小，則不包括 B 在內。

(五) 四捨五入概數取法

1. 檢測年度：98 年度

2. 題目：

「請從 0、2、3、4、5、6、9 這七個數字中，選出兩個數填入下面的空格裡，使得組成的五位數用四捨五入法取概數到千位，得到的答案是 15000。請把所有可能的五位數寫出來。

1			8	7
---	--	--	---	---

請寫出所有可能的五位數：」

3. 評量目的：

本試題主要評量學生能用四捨五入法，對某數在指定位數取概數；並希望學生能將指定的數有規律的放入空格中。

4. 評閱標準：

評閱標準 2 分有 1 類、1 分有 3 類、0 分有 4 類，相關評閱標準如下表：

表 2-1-13 98 年度數學學力檢測建構反應題第五題評閱標準

類別	評閱標準
2-A	呈現 7 個正確答案。
1-A	只管四捨五入的入位(14...)，呈現 3 個正確答案。
1-B	只管四捨五入的捨位(15...)，呈現 4 個正確答案。
1-C	只有 4~6 個正確答案。
0-A	空白
0-B	不管個位數字 8、十位數字 7，只管入位或捨位；但答案不完整或不正確。
0-C	不管 7 個數字的限制，完全或部分寫出五位數的答案。
0-X	其他

5. 評閱結果：

(1) 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-1-14 98 年度數學學力檢測建構反應題第五題評閱結果統計表

得分 類型	0				1			2	合計
	0A	0B	0C	0X	1A	1B	1C	2A	
人數	6	9	55	66	29	3	31	92	291
百分比(%)	2.06	3.09	18.90	22.68	9.97	1.03	10.65	31.62	
人數	136				63			92	
百分比(%)	46.74				21.65			31.62	

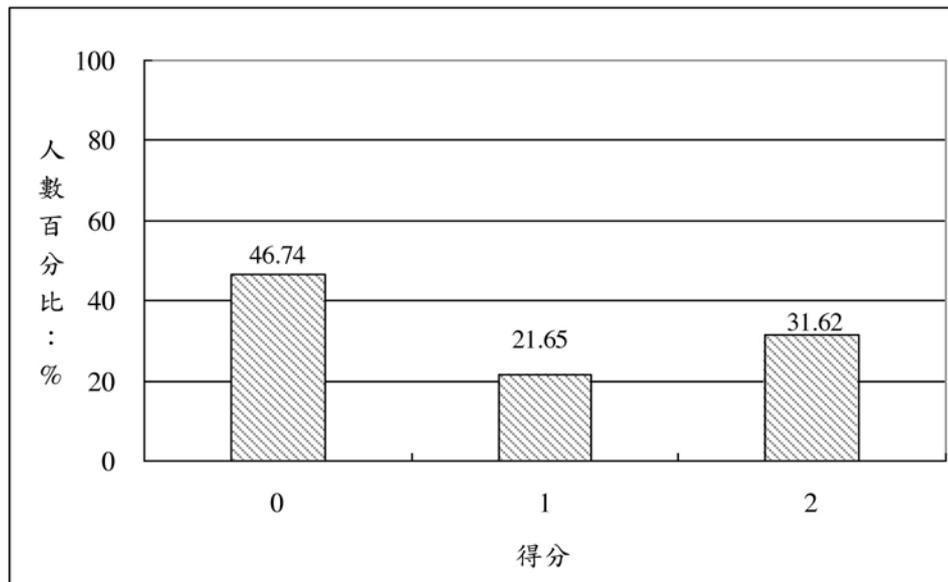


圖 2-1-5 98 年度數學學力檢測建構反應題第五題得分統計圖

由表 2-1-14 可以得知，本試題經評閱後得 2 分的有 92 人，占總人數的 31.62%，整體的答對率約為三成二。這些得到 2 分的答題類型是：呈現 7 個正確答案，有 92 人，占總人數的 31.62%。

得到 1 分的有 63 人，占總人數的 21.65%。得到 1 分的答題類型又分三種：第一種是只管四捨五入的入位(14...)，呈現 3 個正確答案，有 29 人，占總人數的 9.97%；第二種是只管四捨五入的捨位(15...)，呈現 4 個正確答案，僅有 3 人，占總人數的 1.03%；第三種是只有 4~6 個正確答案，有 31 人，占總人數的 10.65%。

得到 0 分的有 136 人，占總人數的 46.74%。其錯誤類型可區分為四種：第一種是完全空白，有 6 人，占總人數的 2.06%；第二種是不管個位數字 8、十位數字 7，只管入位或捨位，但答案不完整或不正確，有 9 人，占總人數的 3.09%；第三種是不管 7 個數字的限制，完全或部分寫出五位數的答案，有 55 人，占總人數的 18.9%；第五種是胡亂作答，有 66 人，占總人數的 22.68%。

(2) 答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-1-15 98 年度數學學力檢測建構反應題第五題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	14587 14687 14987 15087 15287 15387 15487	有規律的排列，呈現 7 個正確答案。

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析								
2	2-A	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> $14 \square 87$ \square 要能使4進位所以要5以上 $\square = 5, 6, 9$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> $15 \square 87$ \square 不能使5進位所以要4以下 $\square = 4, 3, 2, 0$ </div> <div style="margin-left: 40px;"> A <table style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>14587</td><td>15487</td></tr> <tr><td>14687</td><td>15387</td></tr> <tr><td>14987</td><td>15287</td></tr> <tr><td></td><td>15087</td></tr> </table> </div>	14587	15487	14687	15387	14987	15287		15087	<p>有規律的把答案分成兩類，清清楚楚的呈現想法。</p>
14587	15487										
14687	15387										
14987	15287										
	15087										
2	2-A	$14687 \approx 15000$ $14587 \approx 15000$ $15087 \approx 15000$ $14987 \approx 15000$ $15287 \approx 15000$ $15387 \approx 15000$ $15487 \approx 15000$ $14687, 14587, 15087,$ $14987, 15287, 15387$ $A: 15487$	<p>不太規律的排列，呈現7個正確答案。</p>								
1	1-A	14587 14687 14987	<p>只管四捨五入的入位，呈現所有入位後符合題意的答案。</p>								



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
1	1-A		清楚的呈現想法，但只管四捨五入的入位。
1	1-B	<p>請寫出所有可能的五位數：</p> <p>15487</p> <p>15387</p> <p>15287</p> <p>15087</p>	只管四捨五入的捨位，呈現所有捨位後符合題意的答案。
1	1-C	<p>1. $14987 \div 15000$</p> <p>2. $14587 \div 15000$</p> <p>3. $14687 \div 15000$</p> <p>4. $15287 \div 15000$</p> <p>5. $15387 \div 15000$</p>	不規律的排列，遺漏了2組答案。
1	1-C	<p>① 15087</p> <p>② 15287</p> <p>③ 15887</p> <p>④ 15487</p> <p>⑤ 14987</p>	部份規律的排列出正確答案，遺漏了部份答案。

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-B	15287, 15203, 15356, 15469.	①誤解題意，以題目給定的7個數重新做數，不管個位數字8、十位數字7的限制。 ②僅注意部份捨位的解答。 ③沒有規律的排列，答案不完整。
0	0-B	14987 14978 14980 14970	①誤解題意，重新做數 ②僅注意部份進位的解答。 ③沒有規律的排列，答案不完整。
0	0-B	請寫出所有可能的五位數： 14599 = 15000 14596 = 15000 14600 = 15000 14694 = 15000 14999 = 15000 14569 = 15000 14900 = 15000 14699 = 15000 14500 = 15000 14659 = 15000 14695 = 15000 14956 = 15000 14965 = 15000 14549 = 15000 14594 = 15000 14954 = 15000 14645 = 15000 14964 = 15000 14564 = 15000 14962 = 15000 14595 = 15000 14960 = 15000 14945 = 15000 14645 = 15000 14564 = 15000 14653 = 15000 14595 = 15000 14692 = 15000 14945 = 15000 14543 = 15000 14932 = 15000 14604 = 15000	①誤解題意，重新做數 ②僅注意部份進位的解答。 ③沒有規律的排列，雖然做了很多數，也沒辦法窮盡。



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-C	<p>答: 14587 14687 14787 14887 14987 15087 15187 15287 15387 15487</p>	<p>不管 7 個數字的限制，完全寫出五位數的答案。</p>
0	0-C	<p>答: ① 14587 ② 14687 ③ 14787 ④ 14887 ⑤ 14987</p> <p>只要百位數超過 5 或等於 5，即可進位， 所以 14587, 14687, 14787, 14887, 14987 有底線的都大於 5 或等於 5，那千數就可以進 1 位。</p>	<p>不管 7 個數字的限制，寫出進位後為 15000 的答案。</p>
0	0-X	<p>因為四捨五入法是一~四的數無法進入五~九的數可進入。 所以 0, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 0, 2, 3, 4 都無法進入而 5, 6, 9 才可以進入。而我覺得九的機率大</p> <p>A: 14987</p>	<p>①能清楚說明四捨五入法的規約。 ②誤解題意，僅估計一個數。</p>

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析																																																																	
0	0-X	<p>請寫出所有可能的五位數：</p> <table border="1"> <tr><td>14588</td><td>15111</td><td>15291</td><td>15381</td><td>14770</td></tr> <tr><td>14589</td><td>15121</td><td>15261</td><td>15391</td><td>14840</td></tr> <tr><td>14600</td><td>15131</td><td>15271</td><td>15400</td><td>14950</td></tr> <tr><td>14688</td><td>15141</td><td>15281</td><td>15410</td><td></td></tr> <tr><td>14689</td><td>15151</td><td>15291</td><td>15420</td><td></td></tr> <tr><td>14698</td><td>15161</td><td>15300</td><td>15430</td><td></td></tr> <tr><td>14699</td><td>15171</td><td>15311</td><td>15440</td><td></td></tr> <tr><td>14789</td><td>15181</td><td>15321</td><td>15460</td><td></td></tr> <tr><td>14788</td><td>15171</td><td>15331</td><td>15470</td><td></td></tr> <tr><td>14888</td><td>15211</td><td>15341</td><td>15480</td><td></td></tr> <tr><td>14889</td><td>15221</td><td>15351</td><td>15490</td><td></td></tr> <tr><td>14988</td><td>15231</td><td>15361</td><td>14510</td><td></td></tr> <tr><td>14989</td><td>15241</td><td>15371</td><td>14620</td><td></td></tr> </table>	14588	15111	15291	15381	14770	14589	15121	15261	15391	14840	14600	15131	15271	15400	14950	14688	15141	15281	15410		14689	15151	15291	15420		14698	15161	15300	15430		14699	15171	15311	15440		14789	15181	15321	15460		14788	15171	15331	15470		14888	15211	15341	15480		14889	15221	15351	15490		14988	15231	15361	14510		14989	15241	15371	14620		<p>①不管7個數字的限制。 ②也沒管末兩位數的限制。 ③寫出進位後為15000的部份答案。</p>
14588	15111	15291	15381	14770																																																																
14589	15121	15261	15391	14840																																																																
14600	15131	15271	15400	14950																																																																
14688	15141	15281	15410																																																																	
14689	15151	15291	15420																																																																	
14698	15161	15300	15430																																																																	
14699	15171	15311	15440																																																																	
14789	15181	15321	15460																																																																	
14788	15171	15331	15470																																																																	
14888	15211	15341	15480																																																																	
14889	15221	15351	15490																																																																	
14988	15231	15361	14510																																																																	
14989	15241	15371	14620																																																																	

從學生在本題的答題情形來看，絕大部份的學生都能使用四捨五入取概數。約有3成的學生除了掌握四捨五入的方法，並且能正確的排列組合題目所給的數，呈現7個正確答案；有1成的學生僅呈現4~6個正確答案。另外也有1成的學生僅能掌握以捨去或進入的方法取概數，其中9.97%的學生只管四捨五入的入位(14...)；1.03%的學生只管四捨五入的捨位(15...)，顯現學生使用「入位」能力優於使用「捨位」的能力。最後有22.99%的學生，忽略題目數字的限制，無法呈現正確答案，其中18.90%的學生不管題目7個數字的限制，逕自使用0~9十個數字作答；3.09%的學生不管題目已經給定的個位與十位數字，呈現答案與原題目不同；22.68%的學生無法掌握題目意思，答案呈現許多取概數後為15000的數或胡亂作答。

6. 教學建議：

- (1) 「以四捨五入法，對某數在指定位數取概數」的活動，一半以上的學生能運用此技能。
- (2) 教學中，多以生活情境引起使用四捨五入法在指定位數取概數的需求；並提出逆向思考的情境，讓學生經驗由已知概數，反向推導原來的數可能是哪些。
- (3) 本題次要目標為兩個位值上數的排列組合，在數量關係教學中，提供兩位數的排列組合練習，增進學生邏輯性思考的能力。
- (4) 教學中，引導學生閱讀、理解並掌握題目意思。除了數學技能的學習外，正確解讀題目，才能正確作答。



(六) 理解整數四則混合計算

1. 檢測年度：100 年度

2. 題目：

請你設計一個數學題目，這個題目可以用「 $100 \times (3+5)$ 」算出答案。

把你設計的題目寫下來。

3. 評量目的：

本試題主要是希望透過讓學生自己「擬題」的方式，來了解學生是否確實理解乘法對加法分配律兩步驟的解題方法，也希望能藉此提升孩子的語文能力。

4. 評閱標準：

評閱標準 2 分有 3 類、1 分有 1 類、0 分有 2 類，相關評閱標準與舉隅如下表：

表 2-1-16 100 年度數學學力檢測建構反應題第三題評閱標準

類別	評閱標準
2A	依照 $100 \times (3+5)$ 合理擬題 { 100 是單位量，(3+5) 是單位數 }
2B	依照 $(3+5) \times 100$ 合理擬題 { (3+5) 是單位量，100 是單位數 }
2C	用面積模式合理擬題
1A	擬題正確，情境不合理或敘述不完整
0A	空白
0X	其他

5. 評閱結果：

(1) 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-1-17 100 年度數學學力檢測建構反應題第三題評閱結果統計表

得分類型	0		1	2			合計
	0A	0X	1A	2A	2B	2C	
人數	9	109	28	100	35	12	293
百分比(%)	3.07	37.2	9.56	34.13	11.95	4.1	
人數	119		23	141			
百分比(%)	40.27		9.56	50.17			

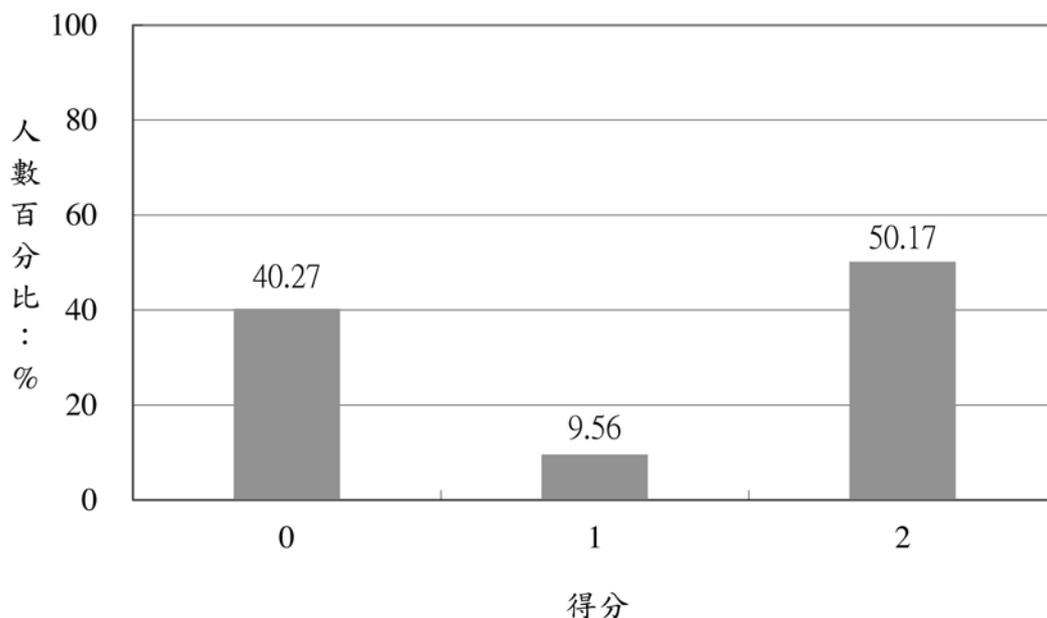


圖 2-1-6 100 年度數學學力檢測建構反應題第三題得分統計圖

由表4-5-12可以得知，本試題經評閱後得2分情形者有141人，占總人數的50.17%，答對率為五成。這些得到2分的答題類型又分為三種：第一種是依照原題目 $100 \times (3+5)$ 合理擬題，其中有些布題情境數字的出現順序與題目上數字出現的順序是一樣的，也有些是不一樣的，但都是以100為單位量， $(3+5)$ 為單位數，得到正確答案，此種類型的學生有100人，占總人數的34.13%；第二種是依照 $(3+5) \times 100$ 合理擬題，其中有些布題情境數字先出現 $(3+5)$ ，也有些是先出現100，但都是以 $(3+5)$ 為單位量，100為單位數，得到正確答案，此種類型的學生有35人，占總人數的11.95%；第三種是用面積模式合理擬題，計算兩個面積的和，得到正確答案，此種類型的學生有12人，占總人數的4.1%。

評閱得到1分的有28人，占總人數的9.56%。此類型學生擬題正確，布題情境有以100為單位量、 $(3+5)$ 為單位數，也有以 $(3+5)$ 單位量、100為單位數，或以面積模式擬題，但情境（含單位）不合理或敘述不完整。

得到0分的有119人，占總人數的40.27%。得到0分的答題類型又分為二種：第一種是該題的答案卷空白，沒有任何作答的痕跡，此種類型的學生有9人，占總人數的3.07%；第二種是其他類型，有些學生將題目計算出答案，有些學生布題情境與題目不合，也有些學生不知所云，此種類型的學生有109人，占總人數的37.2%。



(2)答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-1-18 100 年度數學學力檢測建構反應題第三題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	<p>奶奶給孫子和孫女壓歲錢， 每人100元，奶奶有3個孫子和 5個孫女，請問奶奶 要給的錢是多少元？</p>	<p>①依照 $100 \times (3+5)$ 合理擬題 { 100 是單位量， (3+5) 是單位數 }。 ②先出現 100，再出現 (3+5)。</p>
2	2-A	<p>A: 毛毛，小灰，仔仔和士位同學要參加露營， 每人要繳交費用100元。請問他們一共要交多少錢？</p>	<p>①依照 $100 \times (3+5)$ 合理擬題 { 100 是單位量， (3+5) 是單位數 }。 ②先出現 (3+5)，再出現 100。 ③數字 3 隱含在題意中。</p>
2	2-A	<p>爸爸有100元，弟弟錢是爸爸的3倍， 哥哥是爸爸的5倍，問弟弟和哥哥合起來 多少錢？</p> $100 \times (3+5)$ $= 100 \times 8$ $= 800$ <p>A=800元</p>	<p>①依照 $100 \times (3+5)$ 合理擬題 { 100 是單位量， (3+5) 是單位數 }。 ②先出現 100，再出現 (3+5) ③題目能精確的問「弟弟 和哥哥合起來多少錢？」 也就是 (3+5) 倍。</p>
2	2-A	<p>有一個 $100 \times (3+5) = 800$ 那請問兩個問號的數字是多少？ (問號必需是質數，且不能用)</p>	<p>此解題類型雖非情境 題，但是經閱卷小組討 論，認為是非常有創意的 題目，因此給 2 分。</p>
2	2-B	<p>A: 韓信黑占兵，韓信把 3 位炮 兵和 5 位步兵組成一組，有 100 組，請問韓信到底有幾位士兵？</p>	<p>①依照 $(3+5) \times 100$ 合理擬 題 { (3+5) 是單位量， 100 是單位數 } ②先出現 (3+5)，再出現 100</p>
2	2-C	<p>有一個長方形田地，長是 100cm 寬是 3cm，爸爸請工人把 寬加個 5cm，請問這塊地的面積是多少？</p>	<p>①用面積模式合理擬題 ②擬題結果為 $100 \times (3+5)$</p>

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
1	1-A	<p>姐姐買了三顆一百元的西瓜，弟弟買了五顆一百元的西瓜，共花的多少錢？</p>	<p>依題意好像是「三顆西瓜共 100 元」照理說應該不對，但是經閱卷小組討論結果，認為該解題類型的學生所要表達的應該是「三顆西瓜，每顆 100 元，買三顆...」，孩子漏寫了「每顆」，因此給 1 分，而沒有算全錯。</p>
0	0-X	<p>小明的數學作業簿有一題不會寫，題目是 $100 \times (3+5)$，請幫小明算出答案？</p> $100 \times (3+5)$ $= 800$ <p>A: 800</p>	<p>誤以為命題情境為算出解答，未能布出適當的情境。</p>
0	0-X	<p>一袋糖果有 100 顆糖，小明原有 100 顆糖果，媽媽再給他三袋，小華和小美總共給了小明五袋，請問現在小明有幾顆糖？</p>	<p>此類型的學生忽略了小明原有的 100 顆，使得結果為 $100 \times (1+3+5)$，與原來的題目不符。</p>
0	0-X	<p>一碗紅豆湯有 100 顆紅豆，小明吃了 3 碗又多吃了 5 顆紅豆，請問小明吃了多少顆紅豆？</p> 	<p>① 所布的題目為 $100 \times 3+5$，與原題目 $100 \times (3+5)$ 不符。 ② 此類型學生可能不理解括弧內的算式要先算</p>
0	0-X	<p>媽媽原有 100 元，妹妹給媽媽 3 塊錢，哥哥給媽媽 5 塊錢，所以現在媽媽有多少錢？（請用 $+、\times$）</p> $100 \times (3+5)$ $= 100 \times 15$ $= 1500$ <p>A: 1500 元</p>	<p>① 所布的題目為連加 $100+(3+5)$ ② 不理解乘法對加法分配律的意義。</p>



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-X		此類型的學生忽略了工廠裡原有 100 件，所布的題目應該用 $100 \times (1+3+5)$ ，算出答案，與原來的題目不符。
0	0-X		此類型的學生完全不理解題目中 $100 \times (3+5)$ 的意義。

從學生在本題的答題情形來看，發現一些學生很有創意，出現的題目類型非常多樣。有許多是孩子的日常生活經驗，如常見的買賣、儲蓄、水果、糖果、倍數及面積……問題，也有些學生興趣廣泛、語文程度很好，敘述非常流暢，如韓信點兵等內容。但是整體的答對率偏低，僅有一半左右的學生得到2分(50.17%)，另有四成左右的學生得到0分(40.27%)，歸納其原因有下列幾點：

- ①有三成多的學生以100為單位量布題，這些學生能確認乘法算式中前項為單位量；有一成多的學生以(3+5)為單位量布題，這些學生可能因為乘法有交換律而不在意乘法算式中前項為單位量，也有可能是沒有單位量的概念；另外有4%的學生布題內容為計算兩個長方形面積之和，此類型無單位量與單位數之分別。
- ②布題情境不合理或敘述不夠完整的學生約有一成，有些布題情境與所使用的單位明顯不合理，有些雖將數字運用在布題情境中，但敘述不清楚，這些學生的量感或語文能力有待提升。
- ③我們發現得到0分的119人裡面，有部分學生不明白「設計一個題目」的意思，布題內容為算出題目 $100 \times (3+5)$ 的答案；部分學生誤解「倍」的意思，布題先出現100，再增加(3+5)倍，成為(1+3+5)倍；部分學生不理解括弧內的算式要先算，布題情境為 $100 \times 3 + 5$ ；也有學生沒有乘法對加法分配律的概念，所布題目為連加情境。

6.教學建議：

這題的答對率偏低，我們發現平常課本很少出現讓學生自己就一個算式來「擬題」的題目，也許大部分的老師在課堂上也很少使用此種方法，因此學生對於這種題目就答得比較不理想。因此我們提出以下的教學建議：

- (1) 在教應用題解題時，一定要讓孩子確實讀懂題目，指導孩子分析題意，了解題目中的已知條件有哪些及最後題目要問的是什麼，如此可以讓孩子知道一個完整的題目，要包含哪些要項，對於孩子「擬題」能力的提升將有幫助。
- (2) 乘法具有交換律，教師可從學生擬題中了解學生對單位量與單位數的掌握情形。
- (3) 四則混合計算規則教學時，可以透過情境題目讓學生明白規則的意義，教師並可透過擬題的反向練習，明白學生對算式的理解是否正確。雖然批閱此類題目需花費教師較多精神與時間，但在教學過程中適當運用，可以掌握學生迷思概念；亦可於補救教學中，釐清學生是否理解計算規則的意義。
- (4) 「擬題」不但可以提升孩子的語文能力，更可以訓練孩子的思考及想像力，且當孩子會依據算式設計出正確的題目時，就表示孩子確實理解也會算該算式了。
- (5) 平日教學中多提供一些非例行性的題目讓學生解題，訓練學生的思考、推理與解題的能力。



(七) 理解整數除法直式計算

1. 檢測年度：101 年度

2. 題目：

老師出了「 $200200 \div 400 = ?$ 」的問題，小平把 200200 和 400 都刪掉兩個 0，寫成直式計算如下：

$$\begin{array}{r}
 500 \\
 \hline
 400 \overline{) 200200} \\
 \underline{2000} \\
 2
 \end{array}$$

答案是 500 餘 2。你認為小平的答案正確嗎？把你的理由寫下來。

3. 評量目的：

本試題主要在評量學童是否能使用「被除數與除數同時轉換另一種單位」的算法，簡化一些大數字的除法問題，並能理解直式計算的過程，商及餘數的意義。

4. 評閱標準：

評閱標準 2 分有 3 類、1 分有 3 類、0 分有 7 類，相關評閱標準與舉隅如下表：

表 2-1-19 101 年度數學學力檢測建構反應題第一題評閱標準

類別	評閱標準
2A	小平的答案不正確，且能合理說明餘數的 2 代表 2 個一百是 200
2B	小平的答案不正確，且能說明餘數要補回 2 個 0
2C	小平的答案不正確，使用不刪除 0 方式重新計算後說明餘數應該是 200
1A	小平的答案不正確，認為此題的答案需要繼續除完
1B	小平的答案不正確，利用不刪除 0 的方法重新計算，結果算錯了
1C	小平的答案不正確，說明理由不清楚
0B	小平的答案正確，用文字描述解題過程。
0C	小平的答案正確，用驗算後認為是正確， $500 * 4 + 2 = 2002$
0D	小平的答案正確，將被除數和除數同時刪掉 2 個 0，重新計算後仍認為餘數正確
0E	小平的答案不正確，認為商也要刪除 2 個 0
0F	小平的答案不正確，認為商和餘數都要補 2 個 0
0A	空白
0X	其他

5. 評閱結果：

(1) 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-1-20 101 年度數學學力檢測建構反應題第一題評閱結果統計表

得分 類型	0							1			2			合計
	0A	0B	0C	0D	0E	0F	0X	1A	1B	1C	2A	2B	2C	
人數	2	96	13	21	4	2	20	21	6	15	1	68	28	297
百分比 (%)	0.67	32.32	4.38	7.07	1.35	0.67	6.73	7.07	2.02	5.05	0.34	22.90	9.43	
人數	158							42			97			
百分比 (%)	53.20							14.14			32.66			

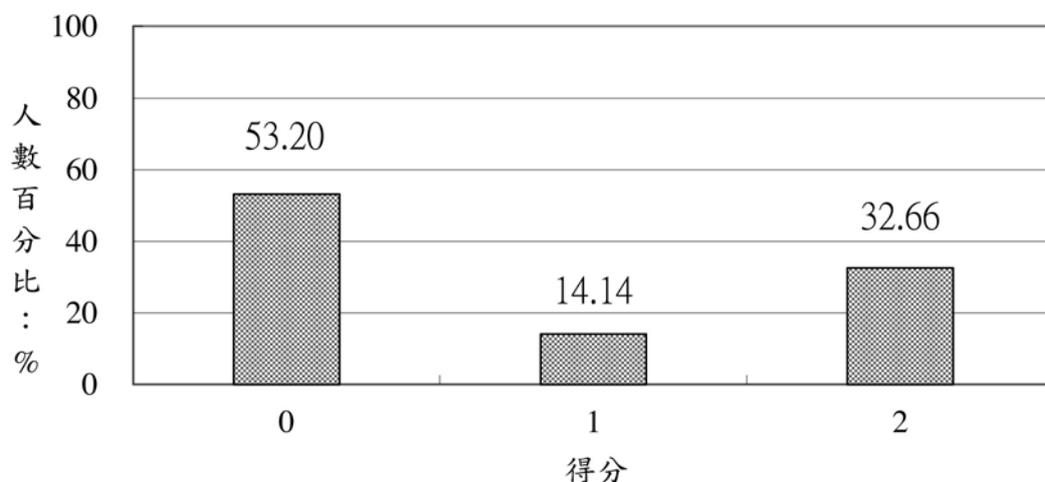


圖 2-1-7 101 年度數學學力檢測建構反應題第一題得分統計圖

由表 4-5-8 可以得知，本試題經評閱後得 2 分情形者有 97 人，占總人數的 32.66%。這些得到 2 分的答題類型又分三種：第一種是能說出小平的答案不正確，且能合理說明餘數的 2 代表 2 個一百，有 1 人，占總人數的 0.34%；第二種是能說出小平的答案不正確，認為餘數要補回 2 個 0，有 68 人，占總人數的 22.9%，第三種是用原題以重新計算的方式後，結果得到餘數應該是 200，有 28 人，占總人數的 9.43%。



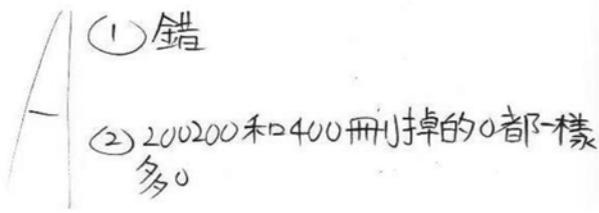
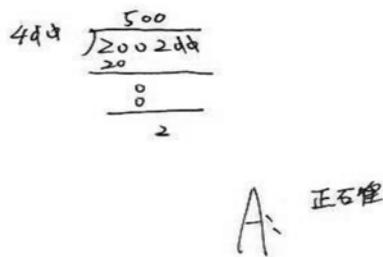
得到 1 分的有 42 人，占總人數的 14.14%。得到 1 分的答題類型又分為三種：第一種是能說出小平的答案不正確，但認為應該繼續計算至除盡為止，有 21 人，占總人數的 7.07%；第二種是能說出小平的答案不正確，並用原題重新計算，但卻計算錯誤，有 6 人，占總人數的 2.02%，第三種是能說出小平的答案不正確，但理由卻說不清楚，有 15 人，占總人數的 5.05%。

得到 0 分的有 158 人，占總人數的 53.2%。得到 0 分的作答類型可分為七種：第一種是答題空白，僅有 2 人是這種情形；第二種是認為小平的答案正確，但只是用文字描述解題過程，有 96 人，占總人數的 32.32%，第三種是用 $500 \times 4 + 2 = 2002$ 的方式驗算後認為小平的答案是正確，有 13 人，占總人數的 4.38%，第四種是先將被除數和除數同時刪掉 2 個 0，重新計算後的結果與原題相同而認為正確，有 21 人，占總人數的 7.07%，第五種是認為商也要刪除 2 個 0，有 4 人，占總人數的 1.35%，第六種是認為商和餘數都要補 2 個 0，有 2 人，占總人數的 0.67%，第七種是用其他理由說明小平的答案正確，有 20 人，占總人數的 6.73%。

(2) 答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-1-21 101 年度數學學力檢測建構反應題第一題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	我認為答案是不對的，刪掉兩個零也就等於變小一百倍，但是餘數要還原之前的那一百倍。	能合理說明餘數的 2 代表 2 個一百
2	2-B	不對，因為被刪掉的兩個零，有餘數就要寫下來，所以這一題是餘 200	認為餘數要補回 2 個 0
2	2-C	$\begin{array}{r} 500 \\ 400 \overline{) 200200} \\ \underline{2000} \\ 200 \end{array}$ 答案 A 錯 是 500 ... 200	用不刪除 0 方式說明
1	1-A	不對，因為如果繼續算下去就不會有餘數，應該要把它算完。	認為應該繼續除完
1	1-B	$\begin{array}{r} 55 \\ 400 \overline{) 200200} \\ \underline{200} \\ 200 \\ \underline{200} \\ 0 \end{array}$ A 不正確	用原題重新計算，但計算錯誤

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
1	1-C		075-002 認為小平算錯，但理由說明不清楚
0	0-B	<p>正確，因為200200和400都各畫掉兩個零後就成為2002÷4 因此答案也就是500餘2。</p>	用文字描述解題過程。
0	0-C	<p>馬演算 $500 \times 4 + 2$ $= 2000 + 2$ $= 2002$</p> <p>A 正確</p>	用驗算的方法說明小平計算正確
0	0-D		重新計算後認為小平計算正確
0	0-E	<p>不對。 你如果刪掉二個零那在答案上也應該刪掉兩個零才對。</p>	認為「商」也要刪掉 2 個 0
0	0-F	<p>不對，因為答案的 500 餘 2 都要加兩個零，之前先刪掉的後來還是要加回去，並沒有說沒有兩個零了！</p>	認為商和餘數都要補 0
0	0-X	<p>對，因為餘數不能比除數大。</p>	以其他理由說明小平計算正確



從學生在本題的答題情形來看，將近 60% 的學生在以直式進行大數除法的計算時，都只記得在計算的程序上，可以先同時將被除數和除數刪除數字末相同個數的「0」，以簡化計算，但是不理解：「被除數與除數可以同時刪除 0」是進行「記數單位的轉換」的概念。

6. 教學建議：

- (1) 在進行「位值概念」的教學時，要讓學生能理解相同的數，用不同的記數單位，所表示的意義也不一樣，例如「200200」這個數，若以「一」為記數單位，是「200200」個「一」，若以「十」為記數單位，是「20020」個「十」；若是以「百」為記數單位，是「2002」個「一百」。
- (2) 在進行以「除法直式解決大數的除法問題」的教學時，要讓學生能充分理解在計算前，可以「先刪除被除數和除數數字末相同個數的 0」的過程，是在進行「被除數與除數同時轉換另一種單位」，也就是學童要能理解「 $200200 \div 400$ 」，可以將算式改寫成「 $2002 \div 4$ 」，是因為將被除數與除數由原來以「一」為記數單位，轉化為以「一百」為記數的單位。
- (3) 在解題過程中，要不斷的與學童溝通和討論以下的問題：
 - i. 單位的轉換：學童要能說出被除數與除數所轉換的單位（以「一百」為記數單位）
 - ii. 簡化問題後，新問題中各數的意義：「 $200200 \div 400$ 」改寫成「 $2002 \div 4$ 」後，「2002」所代表的意義是「2002」個「一百」，「4」個「一百」。
 - iii. 新問題的結果（商數和餘數）在原問題中的意義：「 $2002 \div 4 = 500 \dots 2$ 」，餘數「2」所代表的意涵是「2 個」「一百」
- (4) 在情境中解題：若將「 $200200 \div 400$ 」的計算問題，改寫為「200200 個花片，每 100 個花片裝一袋，4 袋裝一箱，200200 個花片可以裝成多少箱，還剩下多少個？」的情境問題時，學童較能理解將「 $200200 \div 400$ 」改寫為「 $2002 \div 4$ 」的意義是「2002 袋花片，每 4 袋裝一箱」，此時記數的單位就不是「一個」花片，而是一袋（100 個）花片，計算的結果商「500」，所代表的意義是「500 箱」，餘數「2」是「2 袋」，而不是 2 個花片。

(八) 推理兩步驟計算解題

1. 檢測年度：102 年度

2. 題目：

小智有 4 瓶彈珠：甲瓶 24 顆、乙瓶 17 顆、丙瓶 29 顆、丁瓶 10 顆。他想讓每一瓶的彈珠數量都一樣多，請你幫他想想看，可以怎麼做？把你的做法畫出來或寫下來。



3. 評量目的：

本試題主要在評量學生能否理解題意為總數平分為 4 瓶的意義及懂得如何表徵或說明自己推理的想法。

4. 評閱標準：

評閱標準 2 分有 3 類、1 分有 2 類、0 分有 4 類，相關評閱標準與舉隅如下表：

表 2-1-22 102 年度數學學力檢測建構反應題第三題評閱標準

類別	評閱標準
2A	利用每瓶增減數量，得出每瓶都一樣多(每瓶 20 顆)。
2B	先算出總量 80 顆，再算出平均數 20 顆，並把全部彈珠平分到 4 瓶中，每瓶 20 顆。
2C	利用總量算出平均每瓶 20 顆，但未說明分法。
1A	列式正確，計算錯誤。
1B	說明正確，但沒有算式。
0A	空白。
0B	以求(公)因數或(公)倍數的方式解題。
0C	列式及計算都錯(例:100÷4=25)。
0X	其他。



5. 評閱結果：

(1) 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-1-23 102 年度數學學力檢測建構反應題第三題評閱結果統計表

得分 類型	0				1		2			合計
	0A	0B	0C	0X	1A	1B	2A	2B	2C	
人數	26	7	6	57	28	33	64	93	333	647
百分比 (%)	4.02	1.08	0.93	8.81	4.33	5.10	9.89	14.37	51.47	
人數	96				61		490			
百分比 (%)	14.84				9.43		75.73			

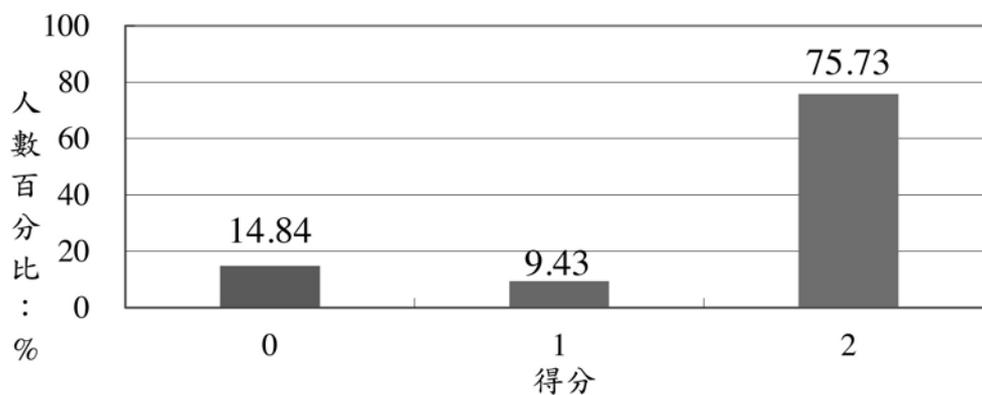


圖 2-1-7 102 年度數學學力檢測建構反應題第三題得分統計圖

由表 4-5-22 可以得知，本試題經評閱後得 2 分情形者有 490 人，占總人數的 75.73%。得到 2 分的答題類型又分為三種：第一種是利用每瓶增減數量，得出每瓶都一樣多(每瓶 20 顆)，得到正確答案，此種類型的學生有 64 人，占總人數的 9.89%；第二種是先算出總量 80 顆，再算出平均數 20 顆，並把全部彈珠平分到 4 瓶中，每瓶 20 顆，得到正確答案，此種類型的學生有 93 人，占總人數的 14.37%；第三種是利用總量算出平均每瓶 20 顆，但未說明分法，此種類型的學生有 333 人，占總人數的 51.47%。

評閱得到 1 分的有 99 人，占總人數的 33.33%。得到 1 分的答題類型又分為二種：第一種是列式正確，計算錯誤，此種類型的學生有 28 人，占總人數的 4.33%；第二種是說明正確，但沒有算式，此種類型的學生有 33 人，占總人數的 5.1%。

得到 0 分的有 96 人，占總人數的 14.84%。得到 0 分的答題類型又分為四種：第一種是該題的答案卷空白，此種類型的學生有 26 人，占總人數的 4.02%；第二種是找 80 的因數，此種類型的學生有 7 人，占總人數的 1.08%；第三種是列式及計算都錯(例： $100 \div 4 = 25$)，此種類型的學生有 6 人，占總人數的 0.93%；第四種是其他的錯誤類型，此種類型的學生有 57 人，占總人數的 8.81%。

(2) 答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-1-24 102 年度數學學力檢測建構反應題第三題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A		能利用每瓶的增減量，以圖示的方式，得出每瓶都是 20 顆。
2	2-A	<p> $\begin{matrix} \text{甲} & \text{乙} & \text{甲} & \text{乙} & \text{丙} & \text{丁} & \text{丙} & \text{丁} & \text{甲} & \text{丁} & \text{甲} & \text{丁} \\ 29 & 3 & 29 & 3 \end{matrix}$ $29-3=26$ $26-3=23$ $23-3=20$ </p> <p> $29-17=12$ $12-10=2$ $2+17=19$ </p> <p> $29-1=28$ $28-1=27$ $27-1=26$ $26-1=25$ $25-1=24$ $24-1=23$ $23-1=22$ $22-1=21$ $21-1=20$ </p> <p> $19+1=20$ </p> <p> $20 \div 4 = 5$ </p> <p> $5 \times 4 = 20$ </p> <p> 全者限 20 顆 </p>	能利用每瓶的增減量，以圖示的方式，得出每瓶都是 20 顆。
2	2-B		先算出總量 80 顆，再算出平均數，得到每瓶是 20 顆。
2	2-B	<p> 把四個瓶子裡的彈珠倒出來，把彈珠的數量加起來，並且除四，這樣就有四堆二十顆的彈珠，再把彈珠放回瓶子裡。 </p>	以文字說明先算出總量，再算出平均數 20 顆，再把彈珠平分到 4 瓶中。



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-C	$(24+17+29+10) \div 4$ $= 80 \div 4$ $= 20$	利用總量算出 80 顆，再除以 4，求得平均 20 顆，但未有任何文字說明。
2	2-C	$(24+17+29+10) \div 4$ $= (41+29+10) \div 4$ $= (70+10) \div 4$ $= 80 \div 4$ $= 20$ <p style="text-align: right;">A 20 顆</p>	利用總量算出 80 顆，再除以 4，求得平均 20 顆，未有任何文字說明，但有回答 20 顆。
1	1-A	$24+17+29+10=70$ $70 \div 4 = 17 \dots 2$ <p style="text-align: center;">A: 17...2 顆</p>	能正確列出先求彈珠總數再求平均的算式，但計算錯誤。
1	1-A	$24+17+19+29+10=99$ $99 \div 4 = 24 \dots 3$ <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: center;"> $\begin{array}{r} 24 \\ 4 \overline{) 99} \\ \underline{8} \\ 19 \\ \underline{16} \\ 3 \end{array}$ </div> <div style="text-align: center;"> $\begin{array}{r} 24 \\ 17 \\ 19 \\ 29 \\ +10 \\ \hline 99 \end{array}$ </div> </div> <p style="text-align: right;">A: 每瓶裝 24 顆，再把另外 3 顆分別裝入 3 瓶</p>	能正確列出先求彈珠總數再求平均的算式，但計算錯誤。
1	1-B	<p>如果是我，我會把瓶子裡的彈珠都拿出來，再平分給每個瓶子。</p>	能以文字說明正確算法，但沒有答案或算式。
1	1-B	<p>先將所有的彈珠數量加起來再平分到 4 個瓶子裡面。</p>	能以文字說明正確算法，但沒有答案或算式。

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-B		找 4 瓶中，17 顆及 29 顆彈珠數的倍數，且沒有文字說明，應是不理解題意或與因倍數題型的題目混淆。
0	0-B	$24+17+29+10=80$ $80 \text{ 的因數: } 1, 2, 4, 8, 10, 16, 20, 40, 80$ $\text{A: } 1, 2, 4, 8, 10, 16, 20, 40$	求出彈珠總數為 80 後，又以 80 的因數來回答，應為不理解題意且與因倍數題型混淆。
0	0-C		左側列式似乎以各瓶的增減，以多補少來找出每瓶的彈珠數為 20 顆，但不知為何又要都加 1 顆得到每瓶為 21 顆。
0	0-C	$30+30+30+30-40$ $=120-40$ $=80$ $\underline{A=80}$	以連加 30 四次再減 40 的算式來列式是錯誤的。
0	0-X		以約估方式做增減，但最後沒有讓各瓶彈珠數一樣多。



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-X	$24+6=30$ $17+13=30$ $29+1=30$ $10+20=30$ <p style="text-align: center;"><u>A:再去買</u></p>	<p>不理解題意,每瓶都增加成一樣多。</p>

從學生在本題的答題情形來看，有 3/4 左右的學生能答對，有 51% 的學生直接以算式來當作做法說明。有 9% 左右的學生試圖以算式或文字說明，但都無法做出合理推理。

6. 教學建議：

從上述的分析中發現超過五成的學生以算式解出每瓶的 20 顆，而沒有任何說明。在題目引導希望學生說明「可以怎麼做」的提示下，學生仍傾向以算式「算出數字」即結束作答而沒有對「可以怎麼做」做出回覆，或是認為大家都明白其意而不說明做法；也有 1/4 的學生無法找到方法說明每瓶如何分配或每瓶最後的顆數。因此我們提出以下的教學建議：

- (1) 教學時，教師可以先請學生發表直觀的想法，如有學生「想把顆數多的先往少的瓶子移動」的兒童法，這些方法也許不是最快的，但卻能充分顯示學生邏輯思考題目的脈絡，教師應予以認同才能激發更多不同的說明與表徵。
- (2) 教師平時應讓學生了解以算式算出答案後，仍需以文字回覆題目所求，否則則視為沒有完整回答，因單從算式中的數字，無法明確表達式子與原問題情境的關係。
- (3) 為協助學生開發多元智慧，教師平時可讓學生明白算式不是惟一得解的方法，多透過建構反應題型的討論，讓學生願意嘗試用自己推理的方式解題，如以文字或圖示等其他表徵來解題，並驗證自己解答的合理性。如此才能讓學生瞭解題意，且不侷限單一解法。

二、分數

(一) 表徵假分數的意義

1. 檢測年度：96 年度

2. 題目：

「一盒巧克力有 4 顆，請畫圖表示 $\frac{5}{2}$ 盒巧克力？」

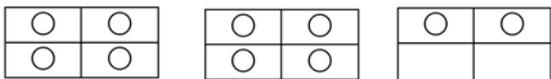
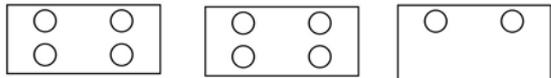
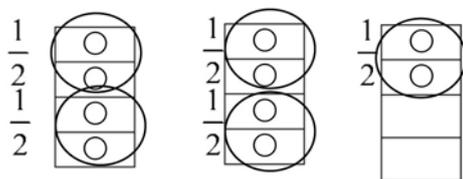
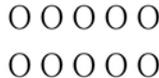
3. 評量目的：

本試題主要在評量學生兩方面的能力：(1) 掌握單位分數內容物超過 1 個的情境；(2) 能正確的表徵假分數的意義。

4. 評閱標準：

評閱標準 2 級分有 3 類、1 級分有 1 類、0 級分有 3 類，相關評閱標準與舉隅如下表：

表 2-2-1 96 年度數學學力檢測建構反應題第一題評閱標準

類別	評閱標準 (評閱舉隅)	
2-A	解題方式為離散量且正確表徵	例一  例二  例三 
2-B	清楚表示 $\frac{5}{2}$ 盒的量	
2-C	連續量且有四等分並正確表徵	例一：  例二： 
1-A	雖正確表示 $\frac{5}{2}$ 盒，但沒有說明 1 盒有 4 顆	例： 
0-A	空白	
0-B	受分子影響而未能正確表示 $\frac{5}{2}$ 盒	
0-X	其他	



5. 評閱結果：

(1) 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-2-2 96 年度數學學力檢測建構反應題第一題評閱結果統計表

得分	0			1	2			小計
	0A	0B	0X	1A	2A	2B	2C	
人數	1	73	37	18	113	5	48	295
百分比(%)	0.34	24.75	12.54	6.10	38.31	1.69	16.27	
人數	111			18	166			
百分比(%)	37.63			6.10	56.27			

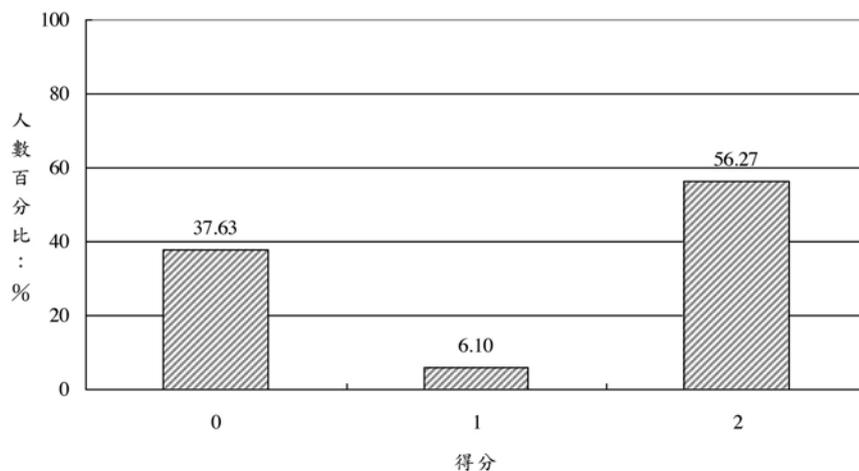


圖 2-2-1 96 年度數學學力檢測建構反應題第一題得分統計圖

由表 2-2-2 可以得知，本試題經評閱後得 2 級分情形者有 166 人，占總人數的 56.27%。整體的答對率為五成六。這些得到 2 級分的答題類型又分三種：第一是能顧及題意離散量情境與正確表徵 $\frac{5}{2}$ 盒巧克力，有 113 人，占全體答對人數的 38.31%；第二是以 $\frac{5}{2}$ 盒巧克力的顆數來表示的，畫出共有 10 顆巧克力的方式表示，有 5 人，占全體答對人數的 1.69%；第三種是考量現實生活情境中，有些巧克力不是顆粒狀，而是塊塊相連的，以連續量清楚表徵一盒有四等分，全部有 $\frac{5}{2}$ 盒巧克力，有 48 人，占全體答對人數的 16.27%。

得到 1 級分的有 18 人，占總人數的 6.10%。僅是畫圖表示 $\frac{5}{2}$ 盒巧克力，卻沒有表示出一盒有 4 顆巧克力。

得到 0 分的有 111 人，可分為三種類型，第一種是答題空白，僅有 1 人是這種情形；第二種是受分子 5 的影響，無法清楚表示 $\frac{5}{2}$ 盒巧克力，有 24.75%；第三種是完全不顧及題意，胡亂作答，占了 12.54%。

(2)答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-2-3 96 年度數學學力檢測建構反應題第一題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	$\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ A 	學生試圖表徵 $\frac{5}{2}$ 盒巧克力是拿了 2 個 1 盒和 $\frac{1}{2}$ 盒合起來的。
2	2-A	$\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ 盒 	學生試圖表徵 $\frac{5}{2}$ 盒巧克力是拿了 2 個 1 盒和半盒合起來，與上一種學生解題類型不同點是此種類型的學生以數字表徵一顆巧克力。
2	2-A		此種學生利用圖示和算式來說明 $\frac{5}{2}$ 盒巧克力是拿了 2 個 1 盒和 $\frac{1}{2}$ 盒合起來的。
2	2-A		學生試圖表徵 $\frac{5}{2}$ 盒巧克力是 5 個 $\frac{1}{2}$ 盒合起來，亦即 5 個 $\frac{1}{2}$ 。
2	2-A	$\frac{5}{2} = \frac{10}{4}$ $= 2\frac{1}{2}$ $= 2\frac{1}{4}$ 	學生想說明在一盒巧克力有 4 顆的情境下， $\frac{5}{2}$ 盒巧克力是 $\frac{10}{4}$ 盒，可見學生對於等值分數是非常清楚的。
2	2-B		學生已算出在一盒巧克力有 4 顆的情境下， $\frac{5}{2}$ 盒巧克力一共有 10 顆，因此畫出 10 顆巧克力以代表 $\frac{5}{2}$ 盒巧克力。
2	2-C		生活情境中也有塊塊相連的巧克力，學生以連續量情境表徵一盒有 4 塊，是四等份， $\frac{5}{2}$ 盒巧克力共 10 等份，其表徵的圖式呼應生活情境中的正方

$2\frac{1}{2}$



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-C		形、長方形兩種模式。
1	1-A	 $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$	學生知道 $\frac{5}{2}$ 盒是 $2\frac{1}{2}$ 盒，但卻忽略表徵情境中的一盒有 4 顆巧克力。
1	1-A		學生知道 $\frac{5}{2}$ 盒是 $\frac{2}{2}$ 、 $\frac{2}{2}$ 、 $\frac{1}{2}$ 盒合起來的，亦即一盒是 $\frac{2}{2}$ 盒，卻同樣的忽略一盒有 4 顆巧克力。
1	1-A	 $2\frac{1}{2}\text{盒}$	這種學生依據真實情境中的巧克力盒表徵，且特地表徵 1 盒與半盒的關係，雖然表徵 $2\frac{1}{2}$ 盒，卻忽略了一盒巧克力的顆數。
1	1-A		這種學生以線段圖表徵了 $\frac{5}{2}$ 是 5 個 $\frac{1}{2}$ ，卻忽略了分數情境中的離散量情境，亦即是一盒巧克力有 4 顆的情境敘述。
0	0-B	 $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$	這類的學生能計算出 $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ ，但對於分數的情境、一等份的分量是混淆的。
0	0-B		學生想表達 $\frac{5}{2}$ 是 5 個 $\frac{1}{2}$ ，但對於分數的情境(一盒巧克力有 4 顆)、一等份的分量也是混淆的，無法理解 $\frac{5}{2}$ 盒在一盒是 4 顆的情境下的真正意涵。

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-B		<p>學生想表達$\frac{5}{2}$是5個$\frac{1}{2}$，卻對於分數語言中的「個、份、盒」產生混淆。</p>
0	0-B		<p>這類的學生試圖表徵$\frac{5}{2}$，卻忽略了一等份是2顆，亦即沒有考慮到單位分數內容物是1個以上了。</p>
0	0-B		
0	0-B		<p>這類的學生知道$\frac{5}{2}$是拿了5等份，僅僅注意「份」卻無法察覺1等份是多少、5等份應該是幾盒。</p>
0	0-B		
0	0-X	$4 \times \frac{5}{2} = \frac{4^2}{1} \times \frac{5}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{5}{1} = \frac{10}{1} = 10$ <p style="text-align: right;">A=10顆</p>	<p>此種學生懂得計算$\frac{5}{2}$的份量，卻無法用圖示符應题目的要求(表徵)，這種學生較注重計算，而忽略題意。</p>
0	0-X		<p>此種學生在表徵日常生活中所見的巧克力，但對於$\frac{5}{2}$盒是不懂的，亦即不懂分數$\frac{5}{2}$的意思。</p>
0	0-X		



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-X		<p>此類型的學生試圖要表徵 $\frac{5}{2}$ 中分子與分母所代表的個別意思，亦即要有「2、5」兩個數字，但 2 與 5 真正的意思，他們是不了解的，此類學生還停留在分數起始概念初期，且對分數的意義也不了解。</p>
0	0-X		
0	0-X		

從學生在本題的答題情形來看，有 56.27% 的學生能夠透過圖示清楚表達假分數的意涵，學生不僅能清晰地描述該假分數所表示的整體量(全部有多少)、單位分數量，且能區分單位「1」的量和單位分數的量。反觀另外 37.63% 答錯的學生，他們在「一盒有 4 個」的情境下，有些無法分辨 $\frac{5}{2}$ 盒的分母和分子的意涵；有些弄不清楚「1 盒 4 個」、「1 盒」、「 $\frac{1}{2}$ 盒」與「5 個 $\frac{1}{2}$ 盒」等單位；更有一些學生只是計算，沒有圖示。

6. 教學建議：

建議教師教學時要著重分數概念的教學，讓學生瞭解分數中各個不同單位間的關係，例如：「一盒月餅有 4 個， $\frac{5}{2}$ 盒有多少個？」，教師要透過圖示指導學生看到各個單位的意涵，像是「整體 1 是一盒有 4 個」、「 $\frac{1}{2}$ 盒是把一盒 4 個平分成二等分，每一等分有 2 個，並用圖示圈出來明顯表示。」，而「 $\frac{5}{2}$ 盒是 5 個 $\frac{1}{2}$ 盒的合成」，透過圖示讓學生看到其間的關係，進而確切了解分數的意涵與分母、分子的意義。

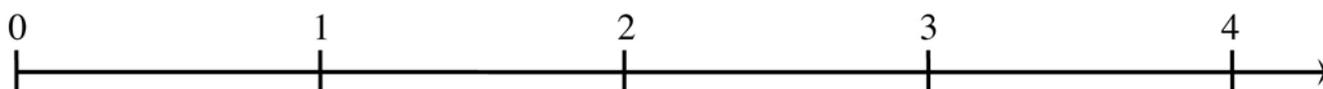
(二) 在數線上標記分數

1. 檢測年度：97 年度

2. 題目：

「請回答下列問題：

(1) 在下面的數線上標示 A、B 兩點的位置，使 A 點在 1.25 的位置，B 點在 $3\frac{3}{5}$ 的位置。



(2) 你是怎麼精確標示出 A、B 這兩點的位置呢？把你的想法或做法寫下來。」

3. 評量目的：

本試題主要評量學生是否能將分數與小數作正確的互換，並能正確的標記在數線上。

4. 評閱標準：

評閱標準 2 級分有 4 類、1 級分有 3 類、0 級分有 7 類，相關評閱標準如下表：

表 2-2-4 97 年度數學學力檢測建構反應題第四題評閱標準

試題描述	類別	評閱標準
標出 A 點的位置	2-A	正確標出點的位置。將單位長平分為四份，並清楚說明。
	2-B	正確標出點的位置。將單位長平分 10 份取 2.5 份，並清楚說明。
	2-C	正確標出點的位置。將單位長平分成其他份數(例如：20 份、40 等份、8 等份)，並清楚說明。
	2-D	正確標出點的位置。以單位長 4 公分的 1.25 倍或 0.25 倍標出 A 點的位置，並清楚說明。
	1-A	正確標出點的位置，但未能清楚說明。
	1-B	未正確標出點的位置，但說明清楚。
	1-X	其他(約估)
	0-A	空白
	0-B	把 1.25 想成 1 cm 又 0.25cm。
	0-C	把 1.25 想成 1 cm 又 25mm。
	0-D	直接用尺量，但量錯了。
	0-E	以約估的方式，但估錯了。
	0-F	用猜的，隨意標出 A 點的位置。
0-X	其他	



試題描述	類別	評閱標準
標出 B 點的位置	2-A	正確標出點的位置。將單位長平分為五份，並清楚說明。
	2-B	正確標出點的位置。將單位長平分 10 份，取 6 份，並清楚說明。
	2-C	正確標出點的位置。將單位長平分成其他分數(例如：20 份、40 等份)
	2-D	正確標出點的位置。以單位長 4 公分的 0.6 倍標出 B 點的位置，並清楚說明。
	1-A	正確標出點的位置，但未能清楚說明。
	1-B	未正確標出點的位置，但說明清楚。
	1-X	其他(約估)
	0-A	空白
	0-B	把 3 又 3/5 想成 3cm 又 0.6cm。
	0-C	把 3 又 3/5 想成 3 cm 又 35mm。
	0-D	直接用尺量，但量錯了。
	0-E	以約估的方式，但估錯了。
	0-F	用猜的，隨意標出 B 點的位置。
	0-X	其他

5. 評閱結果：

(1) 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

① A 點得分情形：

表 2-2-5 97 年度數學學力檢測建構反應題第四題 A 點評閱結果統計表

得分 類型	0							1			2				合計
	0A	0B	0C	0D	0E	0F	0X	1A	1B	1X	2A	2B	2C	2D	
人數	8	9	15	21	12	2	84	29	3	4	78	13	4	18	300
百分比 (%)	2.67	3	5	7	4	0.67	28	9.67	1	1.33	26	4.33	1.33	6	
人數	151							36			113				
百分比 (%)	50.33							12.00			37.67				

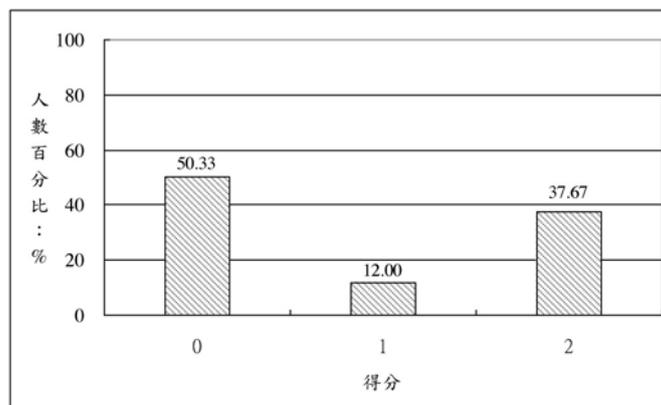


圖 2-2-2 97 年度數學學力檢測建構反應題第四題 A 點得分統計圖

由表 2-2-5 可以得知，本試題經評閱後得 2 級分的有 113 人，占總人數的 37.67%。得到 2 級分的答題類型又分為四種：第一種是正確標出點的位置，將單位長平分為四份，並清楚說明，用此方法做答的有 78 人，占全體答對人數的 26%；第二種是正確標出點的位置，將單位長平分為 10 份，取 2.5 份，並清楚說明，用此方法做答的有 13 人，佔總人數的 4.33%。第三種是正確標出點的位置，將單位長平分成其他份數(例如：20 等份、40 等份、8 等份)，用此方法做答的僅有 4 人，佔總人數的 1.33%。第四種是正確標出點的位置，以單位長 4 公分的 1.25 倍或 0.25 倍標出 A 點的位置，並清楚說明，用此方法做答的有 18 人，佔總人數的 6%。

得到 1 級分的有 36 人，占總人數的 12%。得到 1 級分的答題類型又分為三種：一種是正確標出點的位置，但未能清楚說明，此種做答類型的學生有 29 人，占全體答對人數的 9.67%；第二種是未正確標出點的位置，但說明清楚，此種做答類型的學生有 3 人；第三種是其他答題情形（含約估），此種做答類型的學生有 4 人，佔總人數的 1.33%。

得到 0 分的有 151 人，占總人數的 50.33%：其中完全空白的有 8 人，占總人數的 2.67%。第二種是將 1.25 想成 1 cm 又 0.25cm，此種答類類型的學生有 9 人，占全體答對人數的 3%；第三種是將 1.25 想成 1 cm 又 25mm，此種答類類型的學生有 15 人，佔總人數的 5%；第四種是直接用量，但量錯了，此種答類類型的學生有 21 人，佔總人數的 7%；第五種是以約估的方式，但估錯了，此種答類類型的學生有 12 人，佔總人數的 4%；第六種是用猜的，隨意標出 A 點的位置，此種答類類型的學生僅有 2 人；第七種是胡亂作答，此種答類類型的學生有 84 人，佔總人數的 28%。

②B 點得分情形：

表 2-2-6 97 年度數學學力檢測建構反應題第四題 B 點評閱結果統計表

得分 類型	0							1			2				合 計
	0A	0B	0C	0D	0E	0F	0X	1A	1B	1X	2A	2B	2C	2D	
人數	12	7	4	25	11	2	85	37	6	3	64	12	5	27	300
百分比 (%)	4	2.33	1.33	8.33	3.67	0.67	28.33	12.33	2	1	21.33	4	1.67	9	
人數	146							46			108				
百分比 (%)	48.67							15.33			36.00				

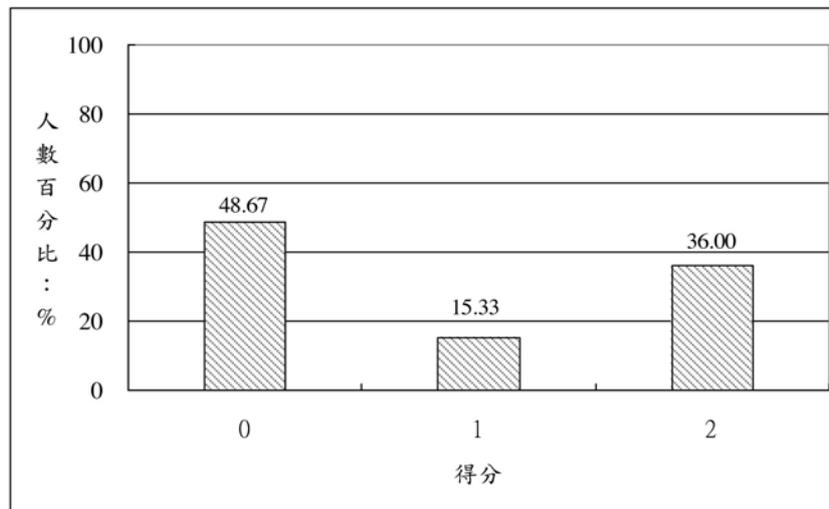


圖 2-2-3 97 年度數學學力檢測建構反應題第四題 B 點得分統計圖

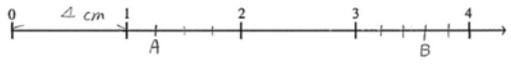
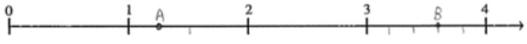
由表 2-2-6 可以得知，本試題經評閱後得 2 級分的有 108 人，占總人數的 36%。得到 2 級分的答題類型又分為四種：一種是正確標出點的位置，將單位長平分為五份，並清楚說明，用此方法做答的有 64 人，占全體答對人數的 21.33%；第二種是正確標出點的位置，將單位長平分 10 份取 6 份，並清楚說明，用此方法做答的有 12 人，佔總人數的 4%。第三種是正確標出點的位置，將單位長平分成其他分數(例如：20 等份、40 等份)，用此方法做答的有 5 人，佔總人數的 1.67%。第四種是正確標出點的位置，以單位長 4 公分的 0.6 倍標出 B 點的位置，並清楚說明，用此方法做答的有 27 人，佔總人數的 9%。

得到 1 級分的有 46 人，占總人數的 15.33%。得到 1 級分的答題類型又分為三種：一種是正確標出點的位置，但未能清楚說明，此種做答類型的學生有 37 人，占全體答對人數的 12.33%；第二種是未正確標出點的位置，但說明清楚，此種做答類型的學生有 6 人，佔總人數的 2%；第三種是其他答題情形(含約估)，此種做答類型的學生有 3 人。

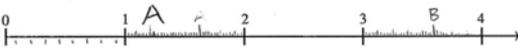
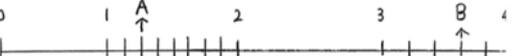
得到 0 分的有 146 人，占總人數的 48.67%：其中完全空白的有 12 人，占總人數的 4%。第二種是將 $3\frac{3}{5}$ 想成 3 cm 又 0.6 cm，此種類型的學生有 7 人，占全體答對人數的 2.33%；第三種是將 $3\frac{3}{5}$ 想成 3 cm 又 35mm，此種類型的學生有 4 人，佔總人數的 1.33%；第四種是直接用量尺，但量錯了，此種類型的學生有 25 人，佔總人數的 8.33%；第五種是以約估的方式，但估錯了，此種類型的學生有 11 人，佔總人數的 3.67%；第六種是用猜的，隨意標出 B 點的位置，此種類型的學生僅有 2 人；第七種是胡亂作答，此種類型的學生有 85 人，佔總人數的 28.33%。

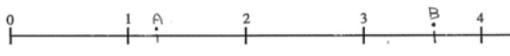
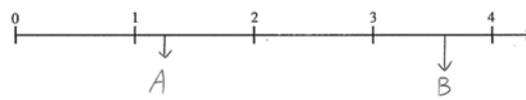
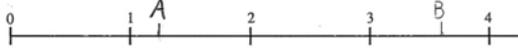
(2) 答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-2-7 97 年度數學學力檢測建構反應題第四題學生解題類型分析

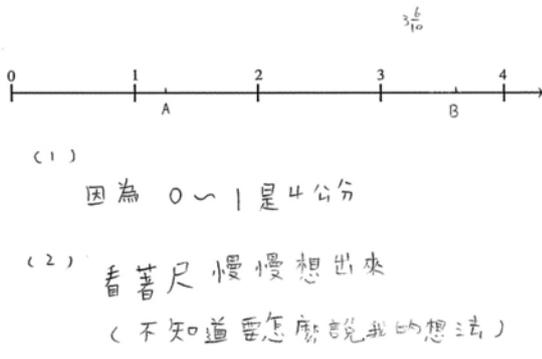
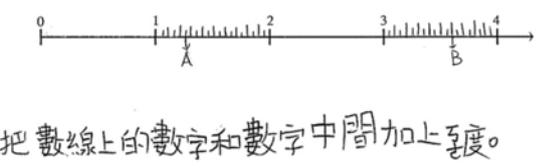
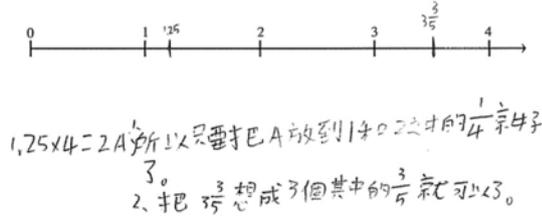
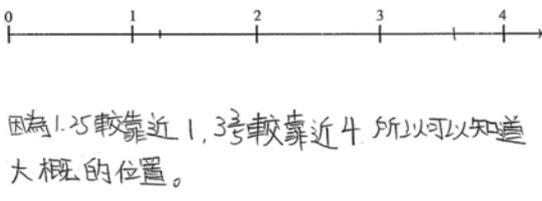
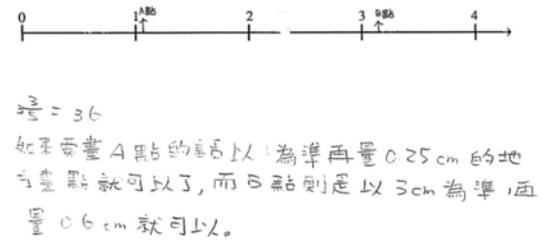
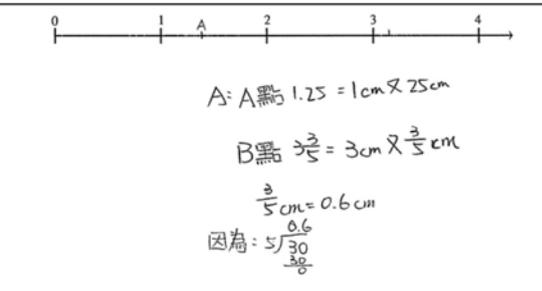
得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	 <p>1.25 等於 $1\frac{25}{100}$, $1\frac{25}{100}$ 等於 $1\frac{1}{4}$, 所以只要將 1~2 的距離 平分成 4 份, 就能找出 A 點。 將 3~4 的距離平分成 5 份, 其中從左邊數來的 第 3 份, 就是 B 點位置。</p>	<p>此種做法的學生具有下面的概念：</p> <p>① 能將小數與分數做正確的互換， 把 1.25 換算成 $1\frac{1}{4}$。</p> <p>② 清楚的知道 $1\frac{1}{4}$ 是把數線 1 和 2 之 間（一個單位長）平分成 4 份， 正確的標出 A 點（1.25）的位置。</p> <p>③ 清楚的知道 $3\frac{3}{5}$ 是把數線 3 和 4 之間（一個單位長）平分成 5 份， 正確的標出 B 點（$3\frac{3}{5}$）的位置。</p>
2	2-A	 <p>A: 先將 1 到 2 中間畫一直線, 那一直線所佔的 2 點點就是 1.5, 然後再在 1 到 1.5 的中間再畫一直線, 最後那點就是 A 的位置了。 B: 先將 3 到 4 畫分為 5 等分, 那 5 等分的第 3 等分便是 B 點了。</p>	<p>此種做法的學生雖然沒有把 1.25 換算成 $1\frac{1}{4}$, 但從他的文字說明裡, 可以得知他很清楚的知道 1.25 是 1 和 2 中間的一半的一半, 也就是 $1\frac{1}{4}$。</p> <p>該生也知道 $3\frac{3}{5}$ 是把數線 3 和 4 之間（一個單位長）平分成 5 份裡 面的 3 份, 正確的標出 B 點（$3\frac{3}{5}$） 的位置。</p>
2	2-B	 <p>A 以 0.4 為 1 格, 畫 10 格就等於 1, A 點是 1.25, 在 1.2 到 1.3 的正中央, 就可以找出 1.25。B 點是 $3\frac{3}{5}$, 先把 $\frac{3}{5}$ 換成假分數, 再用分子去除以分母, 所 得答案是 3.6, 找到這個數字後, 再往右邊 畫 6 格, 就可以找到 3.6。</p>	<p>此種做法的學生具備下面的概念：</p> <p>① 把一個單位長平分成 10 份。</p> <p>② 知道 1.25 是介於 1.2 和 1.3 之間。</p> <p>③ 能做分數與小數的換算, 能把 $3\frac{3}{5}$ 換算成 3.6。</p> <p>④ 知道 $3.6 = 3 + 0.6$。</p> <p>⑤ 能正確的標出 A 點（1.25）和 B 點（$3\frac{3}{5}$）的位置。</p>

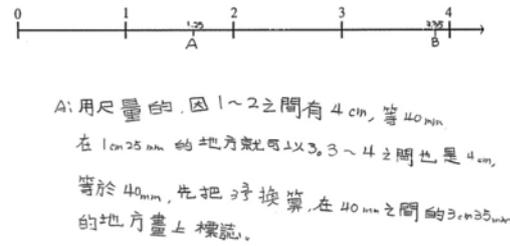
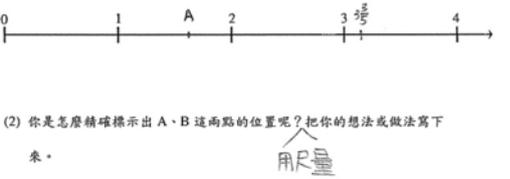
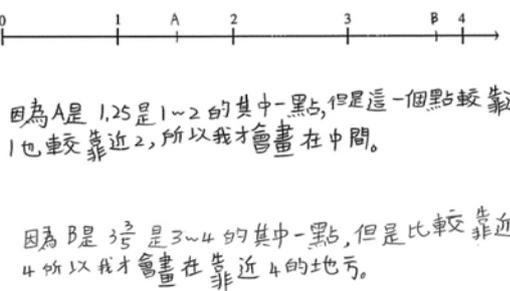
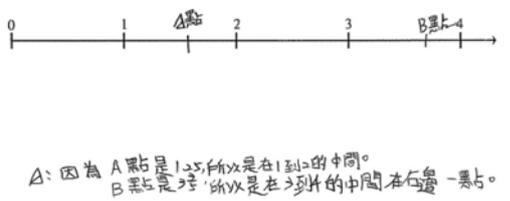
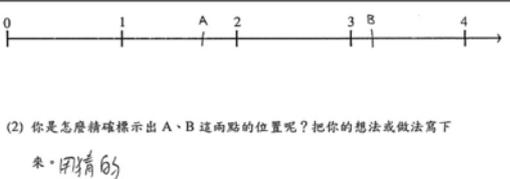
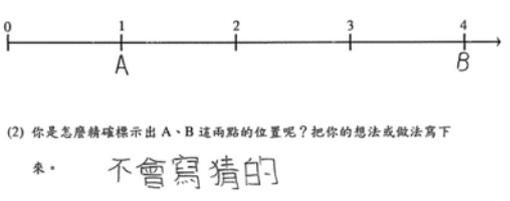
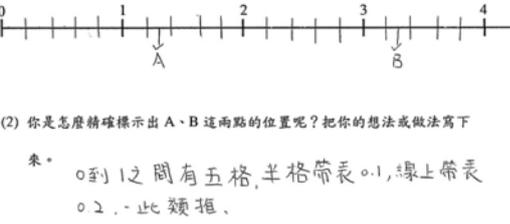


得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-C	 <p>因為A是$1\frac{1}{4}$ B是$3\frac{3}{5}$可是$1\frac{1}{4}$的4和$3\frac{3}{5}$的5兩個數不一樣所以要 把他們兩個通分成20也就是$\frac{5}{20}$和$\frac{12}{20}$這樣就可以了。</p>	<p>此種做法的學生具備下面的概念：</p> <p>①能做分數與小數的換算，把 1.25 換算成$1\frac{1}{4}$。</p> <p>②利用通分的方法把$1\frac{1}{4}$和$3\frac{3}{5}$化成分母一樣的分數，$1\frac{1}{4} = 1\frac{5}{20}$，$3\frac{3}{5} = 3\frac{12}{20}$。</p> <p>③把一個單位長平分成 20 份，再正確的標出 A 點（1.25）和 B 點（$3\frac{3}{5}$）的位置。</p>
2	2-C	 <p>將1分成4份 把1.25換成$1\frac{10}{40}$ 把$3\frac{3}{5}$換成了$3\frac{24}{40}$</p>	<p>此種做法的學生具備下面的概念：</p> <p>①能做分數與小數的換算，把 1.25 換算成$1\frac{1}{4}$。</p> <p>②將$1\frac{1}{4}$和$3\frac{3}{5}$通分化成分母一樣的分數，$1\frac{1}{4} = 1\frac{10}{40}$，$3\frac{3}{5} = 3\frac{24}{40}$。</p> <p>③把一個單位長平分成 40 份，再正確的標出 A 點（1.25）和 B 點（$3\frac{3}{5}$）的位置。</p>
2	2-C	 <p>$\because 1\frac{1}{8} = 1.125$ $\because \frac{1}{5} = 0.2$ $\frac{1}{8} = 0.125$ $\frac{3}{5} = 0.6$ $1.125 + 0.125 = 1.25$ \therefore A 在 1~2 的第 2 條數線 \therefore B 在 3~4 的第 4 條數線</p>	<p>此種做法的學生具備下面的概念</p> <p>①能做分數與小數的換算，把 1.25 換算成$1\frac{2}{8}$。</p> <p>②把一個單位長平分成 8 份，再正確的標出 1.25 的位置。</p> <p>※該生 B 點（$3\frac{3}{5}$）的位置標錯了。</p>

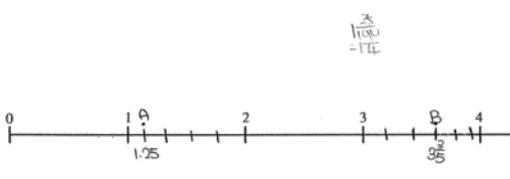
得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-D	 <p>A: 1~2的距離是4cm, 0.25就是$\frac{1}{4}$也是1cm, 用尺上刻度零的地方, 對準1線量1cm, 在上面做記號, 標示出A點。</p> <p>B: 3~4的距離是4cm, $\frac{3}{5}$就是2.4cm, 而$\frac{3}{5}$就是2.4cm 用尺上的刻度零的地方, 對準3線量2.4cm, 在上面做記號, 標示出B點。</p>	<p>此種做法的學生具備下面的概念：</p> <p>①能做分數與小數的換算，把 1.25 換算成 $1\frac{1}{4}$。</p> <p>②理解 $1\frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$，$3\frac{3}{5} = 3 + \frac{3}{5}$。</p> <p>③知道一個單位是 4 公分，$\frac{1}{4}$ 是 1 公分，$\frac{3}{5}$ 是 2.4 公分。</p> <p>④能正確的標出 A 點 (1.25) 和 B 點 ($3\frac{3}{5}$) 的位置。</p>
2	2-D	 <p>* 先量出它一段的距離，然後因為 A 點要 1.25 的位置，也就是 $\frac{1}{4}$ 的位置，然後又因為它一段的距離是 4 公分，所以只要把 $\frac{1}{4} \times 4$ 就是 A 點的位置。乘出來的答案是 5，所以就從 0 開始算 5 公分；至於 B 點就把 $3\frac{3}{5} \times 4$ 之後的做法，都一樣，就可以知道 B 點的位置。</p>	<p>此種做法的學生具備下面的概念：</p> <p>①能做分數與小數的換算，把 1.25 換算成 $1\frac{1}{4}$。</p> <p>②知道一個單位是 4 公分，$1\frac{1}{4}$ 是 5 公分，$3\frac{3}{5}$ 是 14.4 公分。</p> <p>③能正確的標出 A 點 (1.25) 和 B 點 ($3\frac{3}{5}$) 的位置。</p>
2	2-D	 <p>點A: 因為 1 到 2 的距離是 4cm, 1.25 的 0.25 剛好 $\times 4$ 就是 1, 所以剛好可以分成 4 等份, 而點 A 就可以畫在 1~2 距離 4cm 裡的 1cm 上。</p> <p>點B: 它不像點 A, 因為點 B 要畫在 $3\frac{3}{5}$ 的位置, 也就是把 4cm 平分成 5 份, $3\frac{3}{5}$ 的 $\frac{3}{5}$ 就是 5 份裡的第 3 份, 4cm 平分成 5 份就是每份 0.8cm, 而 0.8×3 就是 2.4, 也就是 $\frac{3}{5}$ 裡第三份 = 點 B 的位置了。</p>	<p>此種做法的學生具備下面的概念：</p> <p>①知道一個單位是 4 公分。</p> <p>②理解 $1.25 = 1 + 0.25$。0.25 是 1 公分。</p> <p>③理解 $3\frac{3}{5} = 3 + \frac{3}{5}$。$\frac{3}{5}$ 是 2.4 公分。</p> <p>④能正確的標出 A 點 (1.25) 和 B 點 ($3\frac{3}{5}$) 的位置。</p>



得分	類型	解題類型舉隅	解題 (錯誤) 類型分析
1	1-A	 <p>(1) 因為 0 ~ 1 是 4 公分</p> <p>(2) 看著尺 慢慢想出來 (不知道要怎麼說我的想法)</p>	此種做法的學生能正確的標出 A 點 (1.25) 和 B 點 ($3\frac{3}{5}$) 的位置, 但卻無法清楚說明為什麼要如此標示的原因。
1	1-A	 <p>把數線上的數字和數字中間加上 5 度。</p>	此種做法的學生把一個單位長平分成 20 份, 能正確的標出 A 點 (1.25) 和 B 點 ($3\frac{3}{5}$) 的位置, 但卻無法清楚說明為什麼要如此標示的原因。
1	1-B	 <p>$1.25 \times 4 = 2A$ 所以只要把 A 放到 1 和 2 之中的 $\frac{1}{4}$ 就好了。</p> <p>2. 把 $\frac{3}{5}$ 想成 3 個其中的 $\frac{1}{5}$ 就可以了。</p>	此種做法的學生知道 1.25 是 $1\frac{1}{4}$ 。因此 1.25 要標示在 1 和 2 之中的 $\frac{1}{4}$, 但是標錯位置了。
1	1-X	 <p>因為 1.25 較靠近 1, $3\frac{3}{5}$ 較靠近 4, 所以可以知道大概的位置。</p>	此種做法的學生是用約估的方式, 但標的不太正確。
0	0-B	 <p>$\frac{3}{5} = 36$</p> <p>如果要畫 A 點的話以 1 為準再量 0.25 cm 的地方畫點就可以了, 而 B 點則是 以 3cm 為準, 再量 0.6 cm 就可以。</p>	此種做法的學生理解分數和小數的互換, 能把 $3\frac{3}{5}$ 換算成 3.6。但是不理解小數的意義, 沒有考慮到一個單位有多長, 以為一個單位長是 1 公分, 因此把 1.25 視為 1 又 0.25 公分, 把 3.6 視為 3 又 0.6 公分。
0	0-B	 <p>A: A 點 $1.25 = 1\text{cm}$ 又 25cm</p> <p>B 點 $3\frac{3}{5} = 3\text{cm}$ 又 $\frac{3}{5}\text{cm}$</p> <p>$\frac{3}{5}\text{cm} = 0.6\text{cm}$</p> <p>因為: $\frac{5}{30} = \frac{3}{6}$</p>	此種做法的學生理解分數和小數的互換, 能把 $3\frac{3}{5}$ 換算成 3.6。但是不理解小數的意義, 沒有考慮到一個單位有多長, 以為一個單位長是 1 公分, 因此把 1.25 視為 1 又 0.25 公分, 把 3.6 視為 3 又 0.6 公分。

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-C	 <p>A: 用尺量的，因1~2之間有4cm，等40mm，在1cm25mm的地方就可以以3.3~4之間也是4cm，等於40mm，先把這換算，在40mm之間的3.35mm的地方畫上標記。</p>	此種做法的學生不理解小數與分數的意義，雖然知道一個單位長有4公分，也知道4公分=40毫米，但卻把1.25視為1公分又25毫米，把 $3\frac{3}{5}$ 視為3公分又35毫米。
0	0-D	 <p>(2) 你是怎麼精確標示出A、B這兩點的位置呢？把你的想法或做法寫下來。 用尺量</p>	此種做法的學生說是用尺量，但是量錯了，無法得知是怎麼量的。
0	0-E	 <p>因為A是1.25是1~2的其中一點，但是這一個點較靠近1也較靠近2，所以我才會畫在中間。 因為B是3.35是3~4的其中一點，但是比較靠近4所以我才會畫在靠近4的地方。</p>	此種做法的學生是用約估的方式，但是估錯了，沒能正確的標出A點(1.25)和B點($3\frac{3}{5}$)的位置。
0	0-E	 <p>A: 因為A點是1.25，所以是在1到2的中間。 B點是3.35，所以是在3到4的中間在右邊一點。</p>	此種做法的學生是用約估的方式，但是估錯了，沒能正確的標出A點(1.25)和B點($3\frac{3}{5}$)的位置。
0	0-F	 <p>(2) 你是怎麼精確標示出A、B這兩點的位置呢？把你的想法或做法寫下來。 用猜的</p>	此種做法的學生是用猜的方式，但是猜錯了，沒能正確的標出A點(1.25)和B點($3\frac{3}{5}$)的位置。
0	0-F	 <p>(2) 你是怎麼精確標示出A、B這兩點的位置呢？把你的想法或做法寫下來。 不會寫猜的</p>	此種做法的學生是用猜的方式，由標示的點可知此類的學生對於小數與分數的概念完全不清楚。
0	0-X	 <p>(2) 你是怎麼精確標示出A、B這兩點的位置呢？把你的想法或做法寫下來。 0到1之間有五格，半格帶表0.1，線上帶表0.2，以此類推。</p>	此種做法的學生把每一個單位都平分成5份，但是不理解分數與小數的意義，因此無法正確的標出A點(1.25)和B點($3\frac{3}{5}$)的位置。



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-X	 <p>(2) 你是怎麼精確標示出 A、B 這兩點的位置呢？把你的想法或做法寫下來。</p> <p>答：我是把 A 點換成分數，就知道它是 1 公分裡 4 份的其中 1 小部份。把 B 點畫在 3-4 公分之間，其中 5 份裡的 3 小部份。</p>	此種做法的學生從說明文字中知道 1.25 就是 $1\frac{1}{4}$ ，也知道 $\frac{1}{4}$ 是 4 份裡的 1 份（沒有平分的概念），但是標示的時候卻把 1 份分成 5 份，因此 A 點標錯了。也知道 $\frac{3}{5}$ 是 5 份裡的 1 份（沒有平分的概念），但是標示的時候卻把 1 份分成 6 份，因此 B 點也標錯了。

從學生在本題的答題情形來看，A 點與 B 點完全答對的學生只有三成多，而有高達約 50% 的學生完全答錯，換句話說有一半的學生不會解這一題，歸納其原因有下列幾點：

- ① 我們發現要將分數與小數標示在數線上，課本或習作的題目都是已經將一個單位量平分好若干等份，讓學生作答，學生較容易解此種例行性的題目。而本題是要學生依據題意，自己決定要將一個單位量平分成若干等份，屬於非例行性的題目，因為平常學生較少接觸這類型的題目，因此錯誤率明顯較高。
- ② 我們也發現這些答錯的學生對於分數與小數的互換、分數與小數的意義不甚理解，也不知道分數是建立在「平分」的基礎上，以為任意分成 5 份，其中的 1 份就是 $\frac{1}{5}$ 。
- ③ 答錯的學生當中有些人把一個單位量 4 公分視為 1 公分，並把 1.25 當作是 1 公分又 0.25 公分，或 1 公分又 25 毫米，把 $3\frac{3}{5}$ 誤以為是 3 公分又 0.6 公分，或 3 公分又 35 毫米。
- ④ A 點有 12%，B 點的有 15% 的學生得到 1 分，這些學生絕大部份（80%）是標示正確，可惜無法把想法或作法詳細的說明，顯示學生的表達能力有待加強。

6. 教學建議：

- (1) 平日多提供一些非例行性的題目讓學生解題，訓練學生的思考、推理與解題的能力。

- (2) 著重小數概念的教學，讓學生確實理解小數的意義。知道 0.1 是將 1 份平分成 10 小份裡面的 1 小份，0.01 是將 1 份平分成 100 小份裡面的 1 小份，0.25 是將 1 份平分成 100 小份裡面的 25 小份， $1.25 = 1 + 0.25$ ，1.25 是 125 個 0.01.....。
- (3) 著重分數概念的教學，讓學生確實理解分數的意涵與分母、分子的意義，特別要提醒學生：分數一定是建立在「平分」的基礎上。
- (4) 讓學生熟練分數與小數的互換。
- (5) 讓學生了解數線上的一個單位長並非一定是 1 公分。
- (6) 平常要求學生把為什麼這樣做的原因說出來或寫出來，藉此一方面可以訓練學生的語文表達能力，一方面也可以了解學生的解題策略及想法，提供老師補救教學的參考。



(三) 表徵分數之整數相除的意義

1. 檢測年度：98 年度

2. 題目：

「『8 個人平分 3 個喜餅，每個人可以分到幾個喜餅？』請畫圖表示怎麼分，並寫出作法及答案。」

3. 評量目的：

本試題主要評量學生是否能畫圖表示分數的平分概念，並正確計算出答案。

4. 評閱標準：

評閱標準 2 分有 5 類、1 分有 4 類、0 分有 5 類，相關評閱標準如下表：

表 2-2-8 98 年度數學學力檢測建構反應題第四題評閱標準

類別	評閱標準
2-A	三個喜餅都 8 等分，每一個各取 1 份。
2-B	三個喜餅都 8 等分，取其中一個的 3 份。
2-C	三個喜餅都 8 等分，分成八個 $\frac{3}{8}$ 。
2-D	三個喜餅都 8 等分，未塗色表示，有算式，答對。
2-E	$\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ (二個 4 等分，一個 8 等分)。
1-A	三個喜餅都 8 等分，未塗色表示，無算式，答對。
1-B	三個喜餅未畫出等分，有算式，答對。
1-C	未畫圖，有算式，答對。
1-D	圖錯，有算式，答對。
0-A	空白
0-B	三個喜餅都 8 等分，每個人分 3 塊，答 3 個。
0-C	$8 \div 3$ 。
0-D	圖對，答 $\frac{3}{24}$ 個。
0-X	其他

5. 評閱結果：

(1) 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-2-9 98 年度數學學力檢測建構反應題第四題評閱結果統計表

得分 類型	0					1				2					合計
	0A	0B	0C	0D	0X	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	2E	
人數	14	13	34	9	52	1	22	11	23	33	22	29	22	6	
百分比 (%)	4.81	4.47	11.68	3.09	17.87	0.34	7.56	3.78	7.90	11.34	7.56	9.97	7.56	2.06	
人數	122					57				112					291
百分比 (%)	41.92					19.59				38.49					

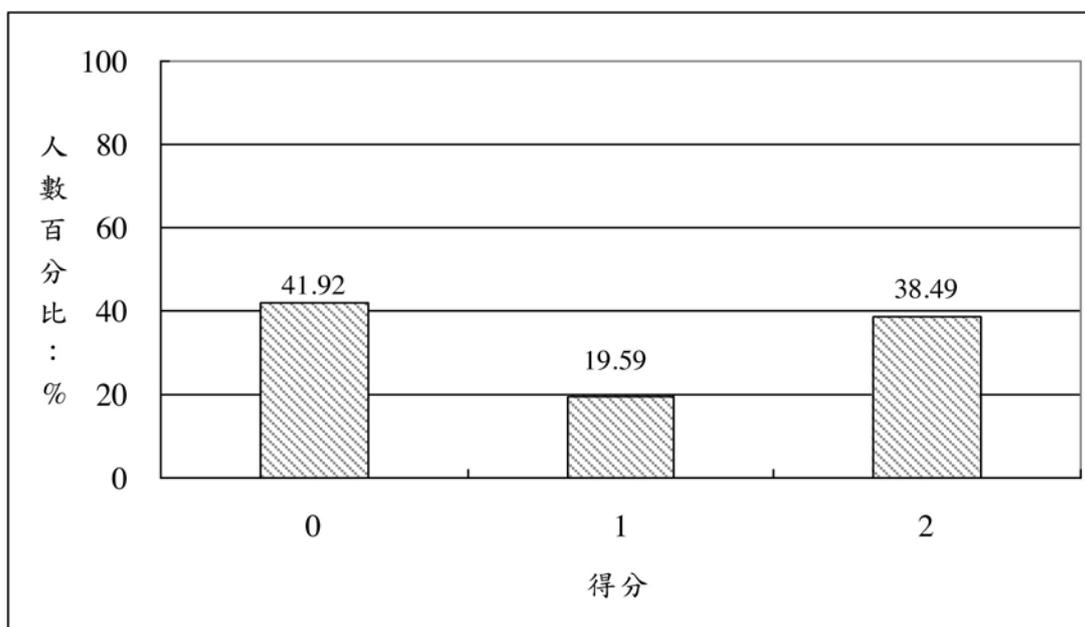


圖 2-2-4 98 年度數學學力檢測建構反應題第四題得分統計圖

由表 2-2-9 可以得知，本試題經評閱後得 2 分的有 112 人，占總人數的 38.49%。得到 2 分的答題類型又分五種：一種是三個喜餅都 8 等分，每一個各取 1 份，此種作答的學生有 33 人，占總人數的 11.34%；第二種是三個喜餅都 8 等分，取其中一個的 3 份，此種作答類型的學生有 22 人，占總人數的 7.56%；第三種是三個喜餅都 8 等分，分成八個 $\frac{3}{8}$ ，此種作答類型的學生有 29 人，占總人數的 9.97%；第四種是三個喜餅都 8 等分，未塗色表示，有算式，答對，此種作答類型的學生有 22 人，占總人數的 7.56%；第五種是 $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ (二個 4 等分，一個 8 等分)，此種作答類型的學生有 6 人，占總人數的 2.06%。



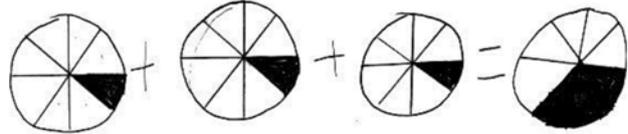
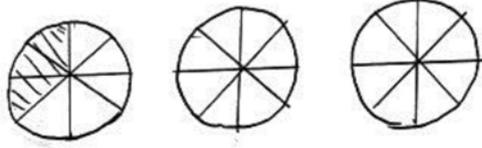
得到 1 分的有 57 人，占總人數的 19.59%。得到 1 分的答題類型又分四種：一種是三個喜餅都 8 等分，未塗色表示，無算式，答對，此種類型的學生僅有 1 人，占總人數的 0.34%；第二種是三個喜餅未畫出等分，有算式，答對，此種類型的學生有 22 人，占總人數的 7.56%；第三種是未畫圖，有算式，答對，此種類型的學生有 11 人，占總人數的 3.78%；第四種是圖錯，有算式，答對，此種類型的學生有 23 人，占總人數的 7.9%。

得到 0 分的有 122 人，占總人數的 41.92%：其中完全空白的有 14 人，占總人數的 4.81%；第二種是三個喜餅都 8 等分，每個人分 3 塊，答 3 個，此種類型的學生有 13 人，占總人數的 4.47%；第三種是 $8 \div 3$ ，此種類型的學生有 34 人，占總人數的 11.68%；第四種是圖對，答 $\frac{3}{24}$ 個，此種類型的學生有 9 人，占總人數的 3.09%；第五種是胡亂作答，有 52 人，占總人數的 17.87%。

(2) 答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

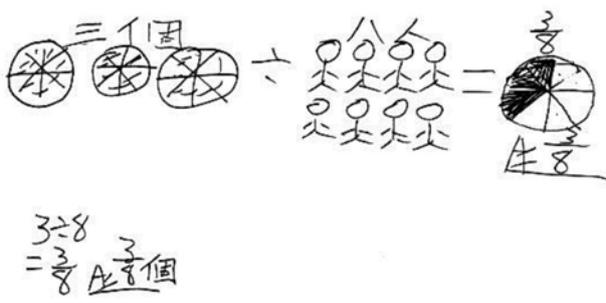
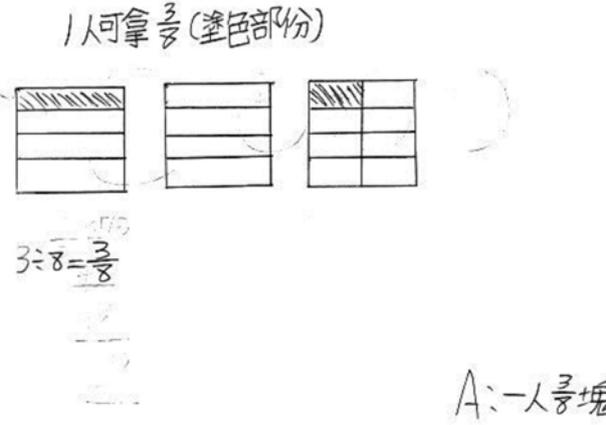
表 2-2-10 98 年度數學學力檢測建構反應題第四題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A		<p>此種做法畫出三個喜餅，並將每個喜餅都 8 等分，從每一個喜餅各取 1 份給一個人，即每個人都分別從三個喜餅中分到 $\frac{1}{8}$ 個喜餅，共分得 $(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8})$ 個喜餅。</p>
2	2-A		<p>此種做法畫出三個喜餅，並將每個喜餅都 8 等分，從每一個喜餅各取 1 份給一個人，即每個人都分別從三個喜餅中分到 $\frac{1}{8}$ 個喜餅，共分得 $(\frac{1}{8} \times 3 = \frac{3}{8})$ 個喜餅。</p>

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	 <p>$3 \div 8 = \frac{3}{8}$</p> <p>A: $\frac{3}{8}$ 個</p>	<p>此種做法畫出三個喜餅，並將每個喜餅都 8 等分，從每一個喜餅各取 1 份給一個人，每個人得到的三份相當於一個喜餅分成 8 等分的其中 3 份，即每個人都分得 $(3 \div 8 = \frac{3}{8})$ 個喜餅。</p>
2	2-A	 <p>$3 \div 8 = \frac{3}{8}$</p> <p>A: $\frac{3}{8}$ 個</p>	<p>此種做法畫出三個喜餅，並將每個喜餅都 8 等分，從每一個喜餅各取 1 份給一個人，即每個人都分得 $(3 \div 8 = \frac{3}{8})$ 個喜餅。和前一個做法的差異，在於畫出的喜餅形狀不是圓形，而是長方形。</p>
2	2-B	 <p>$3 \div 8 = \frac{3}{8}$</p> <p>A: $\frac{3}{8}$ 個</p> <p>驗算： $\frac{3}{8} \times 8$ $= \frac{24}{8}$ $= 3$</p>	<p>此種做法畫出三個喜餅，並將每個喜餅都 8 等分，從其中一個喜餅取 3 份，分給一個人，表示這是一人份，也就是 $(3 \div 8 = \frac{3}{8})$ 個喜餅。旁邊還加上驗算：每個人都分得 $\frac{3}{8}$ 個喜餅，8 個人共分掉 $(\frac{3}{8} \times 8 = 3)$ 個喜餅。</p>

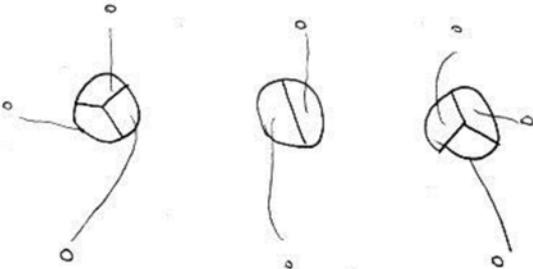
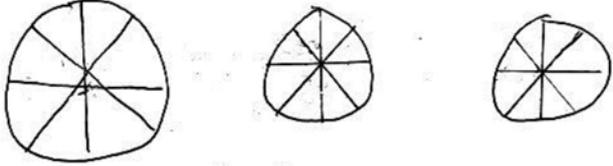
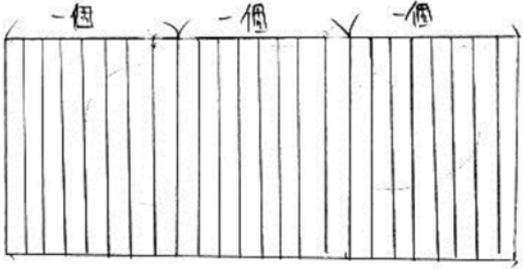


得分	類型	解題類型舉隅	解題 (錯誤) 類型分析
2	2-C	<p style="text-align: center;">$3 \div 8 = \frac{3}{8}$</p> <p style="text-align: center;">A: $\frac{3}{8}$ 個</p>	<p>這三種做法都畫出三個喜餅，並將每個喜餅都 8 等分，三個喜餅共被分成了 24 份，每 3 份分給一個人，即每 $\frac{3}{8}$ 個喜餅分給一個人，三個喜餅共可以分成八人。這三種做法分別用不同的表徵，表示出分給八個人的喜餅，也就是都把 24 份 $\frac{1}{8}$ 個喜餅，改以 $\frac{3}{8}$ 個喜餅當作 1 份，重新分成 8 份，分別分給八個人。</p>
2	2-C	<p>$3 \div 8 = \frac{3}{8}$</p> <p>第一人: V 第四人: ☆ 第七人: ▲ 第二人: X 第五人: ~ 第八人: ○ 第三人: △ 第六人: γ</p> <p style="text-align: center;">$3 \div 8 = \frac{3}{8}$</p> <p style="text-align: center;">A: $\frac{3}{8}$ 個</p>	
2	2-C	<p style="text-align: center;">$3 \div 8 = \frac{3}{8}$</p> <p style="text-align: center;">A: $\frac{3}{8}$ 個喜餅</p>	
2	2-D	<p>$\begin{array}{r} 0.375 \\ 8 \overline{) 3.0} \\ \underline{24} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$</p> <p>$3 \div 8 = \frac{3}{8}$</p> <p style="text-align: center;">A: 0.375 個 $\frac{3}{8}$ 個</p>	<p>此種做法畫出三個喜餅，並將每個喜餅都 8 等分，共分成 24 份，每份都是 $\frac{1}{8}$ 個喜餅，但未塗色表示一個人可分得的喜餅，只以算式『$3 \div 8 = 0.375$』和『$3 \div 8 = \frac{3}{8}$』算出答案。</p>

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-D	 <p> $3 \div 8 = \frac{3}{8}$ $= \frac{3}{8}$ A: $\frac{3}{8}$個 </p>	<p>此種做法畫出題意所述的三個喜餅和八個人，並用『餅除以人』，表示三個喜餅要分給八個人，再以算式『$3 \div 8 = \frac{3}{8}$』算出答案：一個人可分得$\frac{3}{8}$個喜餅。</p>
2	2-E	 <p> 我先把兩個喜餅平分完，最後一個平分成八份 A: $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ </p>	<p>此種做法畫出三個喜餅，先將其中兩個喜餅各4等分，共分成8份，每份是$\frac{1}{4}$個喜餅，先分給8人每人一份，再將第三個喜餅8等分，每份是$\frac{1}{8}$個喜餅，也分給8人每人一份，每個人共分得$(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8})$個喜餅。</p>
2	2-E	 <p> 1人可拿$\frac{3}{8}$ (塗色部份) $3 \div 8 = \frac{3}{8}$ A: 一人$\frac{3}{8}$塊 </p>	<p>此種做法畫出三個喜餅，先將其中兩個喜餅各4等分，共分成8份，每份是$\frac{1}{4}$個喜餅，再將第三個喜餅8等分，每份是$\frac{1}{8}$個喜餅。每個人可以從8份$\frac{1}{4}$個喜餅和8份$\frac{1}{8}$個喜餅中各拿一份，共分得$(3 \div 8 = \frac{3}{8})$個喜餅。</p>



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
1	1-A		此種做法畫出三個喜餅，並將每個喜餅都 8 等分，但未塗色表示一個人可分得的喜餅，也未寫出算式，即使答案正確，只能給予部份分數。
1	1-B		此種做法畫出三個喜餅和八個人，但三個喜餅未畫出等分，即使寫出算式，也計算出正確答案，只能給予部份分數。
1	1-B		此種做法畫出三個喜餅和八個人，但三個喜餅未畫出等分，即使有算式，也計算出正確答案，並寫出要將三個喜餅分成 1000 塊，可惜三個喜餅無法等分成 1000 塊，使八個人都拿到全部一樣大的 375 塊，因此只能給予部份分數。
1	1-C		此種做法並未畫圖表示 8 個人平分 3 個喜餅的分法，即使寫出算式，也計算出正確答案，只能給予部份分數。

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
1	1-D	$3 \div 8 = 0.375$ A: 0.375個 	此種做法畫出三個喜餅，並將三個喜餅共分成8份，但8份並不完全相等，不符題目中“平分”之意，即使寫出算式，也計算出正確答案，只能給予部份分數。
0	0-B	 $8 \times 3 = 24$ $24 \div 8 = 3$ A: 每人3片喜餅	此種做法畫出三個喜餅，並將每個喜餅都8等分，三個喜餅共分成了24片，24片分給8個人，每個人分到3片。但題目問的是『每個人可以分到幾個喜餅？』應以每片是 $\frac{1}{8}$ 個喜餅，3片是 $\frac{3}{8}$ 個喜餅來回答。
0	0-B	 平分成24塊 $24 \div 8 = 3$ A: 3個	此種做法和前一種做法相同，同樣將三個喜餅分別8等分，三個喜餅共分成了24片，每片都是 $\frac{1}{8}$ 個喜餅。24片分給8個人，每個人分到3片喜餅，而非3個喜餅。3片應是 $\frac{3}{8}$ 個喜餅。



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-C	$8 \div 3 = \frac{8}{3}$ $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ $A: 2\frac{2}{3} \text{個}$	<p>這兩種做法將題意『8個人平分3個喜餅』的算式記成『$8 \div 3$』，表示對等分除問題中的『總數』和『單位數』搞不清楚。</p>
0	0-C	$8 \div 3 = 2\frac{2}{3}$ $A: 2\frac{2}{3} \text{個}$ $\frac{8}{3} \div \text{人} = \text{喜餅} \times 3 = ?$	
0	0-D	$3 = 24 \text{塊}$ $24 \div 8 = 3$ $A: \frac{3}{24} \text{塊}$	<p>此種做法畫出三個喜餅，並將每個喜餅都8等分，三個喜餅共分成了24塊，24塊分給8個人，每個人分到3塊，即每個人分到全部24塊中的$\frac{3}{24}$。但題目問的是『每個人可以分到幾個喜餅？』應以每塊是1個喜餅的$\frac{1}{8}$，也就是$\frac{1}{8}$個喜餅，3塊是$\frac{3}{8}$個喜餅來回答。</p>
0	0-X	$8 \div 3 = 2 \dots 2$ $A: \frac{1}{3} \text{或} \frac{1}{2} \text{個}$	<p>此種做法畫出三個喜餅，將其中兩個喜餅分別三等分、另一個喜餅二等分，三個喜餅共分成八份，回答每人分得$\frac{1}{3}$或$\frac{1}{2}$個喜餅，不符題目中“平分”之意。又算式記成『$8 \div 3$』，也犯了等分除問題中『總數』和『單位數』搞不清楚的錯誤。</p>

從學生在本題的答題情形來看，僅有近四成學生能正確畫圖表徵等分除問題的分法，並寫出正確的算式和答案；有近兩成的學生只得到 1 分，會寫出算式，也能計算出正確答案，但幾乎都有畫圖表徵的困難；還有超過四成的學生，對總量和『1』、『平分』問題需要等分，以及等分除問題中的『總數』和『單位數』，都存在概念不清的問題，其中有近 5% 學生空白未作答。由學生在本題的表現，可以發現多數學生都能以算式計算出平分情境中整數相除問題的正確答案，卻只有部分學生能正確以圖像表徵對問題的理解，也看到學生有不同的表徵方式，而其他學生可能因較少練習以圖像方式理解問題，存在的錯誤概念未獲釐清，而在此類型問題中暴露了概念不清的問題。

6. 教學建議：

- (1) 在平日的除法問題教學中，增加操作活動，例如：具體物的分發、等分、...等，強化對除法問題情境的理解和『等分』、『一樣多』的意義，並累積操作解題經驗。
- (2) 加強圖像表徵的學習，幫助學生透過圖像思考問題，並強調總量和『1』的概念，以本題為例，『3 個』喜餅是被分的總量，題目要問『每個人可以分到幾個喜餅？』則是要以『1 個』喜餅為單位，回答每個人分到的單位量。

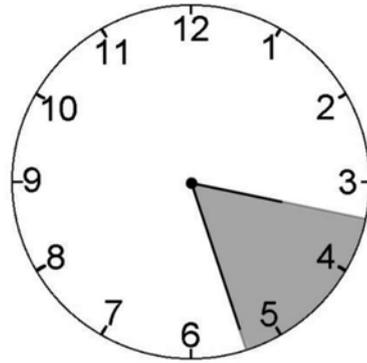


(四) 由部分推估全體量

1. 檢測年度：99 年度

2. 題目：

「陽明山國家公園管理處要在花鐘裡種花。下圖花鐘的塗色區域已經種了 350 朵花，請估計當花鐘全部種滿時，會有多少朵花？把你估算的方法寫下來。」



3. 評量目的：

本試題主要評量學生透過直觀圖示找出部分量與全部的關係，而推估全部的數量。

4. 評閱標準：

評閱標準 2 分有 2 類、1 分有 3 類、0 分有 3 類，相關評閱標準與舉隅如下表：

表 2-2-11 99 年度數學學力檢測建構反應題第一題評閱標準

類別	評閱標準 (評閱舉隅)
2-A	以倍數的方法計算。
2-B	以度數的方式計算。
1-A	算式寫對，答案計算錯。
1-B	算式寫對，說明部分錯。
1-C	題目誤解為還要再種幾朵花。
0-A	空白
0-B	受 60 分鐘影響， $60 \div 12 = 5$ $350 \times 5 = 1750$ 。
0-X	其他

5. 評閱結果：

(1) 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-2-12 99 年度數學學力檢測建構反應題第一題評閱結果統計表

得分 類型	0			1			2		合計
	0A	0B	0X	1A	1B	1C	2A	2B	
人數	2	2	56	10	1	15	129	80	295
百分比(%)	0.68	0.68	18.98	3.39	0.34	5.08	43.73	27.12	
人數	60			26			209		
百分比(%)	20.34			8.81			70.85		

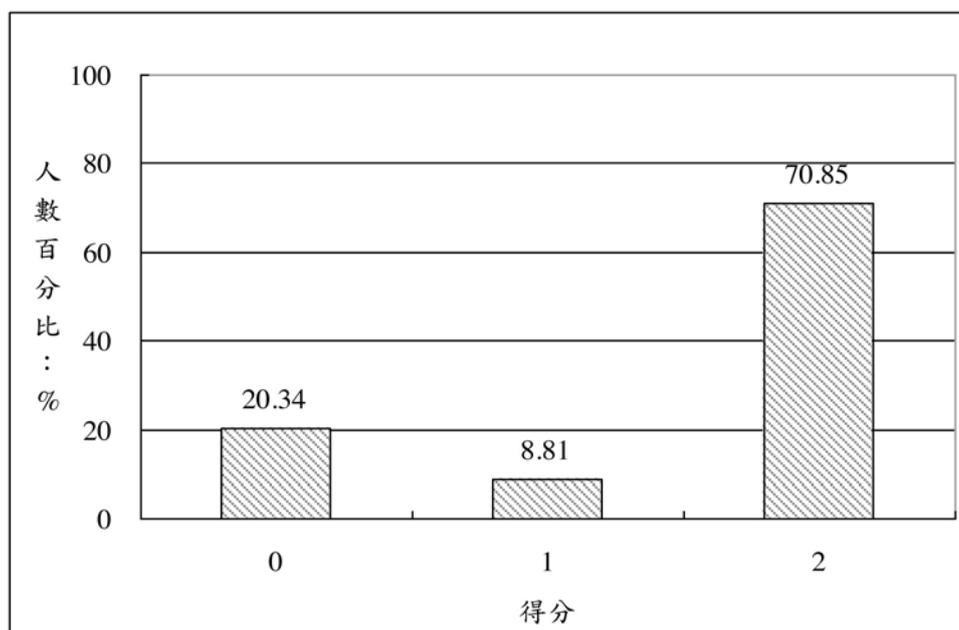


圖 2-2-5 99 年度數學學力檢測建構反應題第一題得分統計圖

由表 2-2-12 可以得知，本試題經評閱後得 2 分情形者有 209 人，占總人數的 70.85%，整體的答對率約為七成一。這些得到 2 分的答題類型又分二種：第一是以倍數的方法計算，得出正確答案，有 129 人，占總人數的 43.73%；第二是以度數的方式計算，得出正確答案，有 80 人，占總人數的 27.12%。

得到 1 分的有 26 人，占總人數的 8.81%。得到 1 分的答題類型又分為三種：第一種是算式寫對，答案計算錯，此種作答類型的學生有 10 人，占總人數的 3.39%；第二種是算式寫對，說明部分錯，此種作答類型的學生僅有 1 人，占總人數的 0.34%；第三種是將題目誤解為還要再種幾朵花，此種作答類型的學生有 15 人，占總人數的 5.08%。

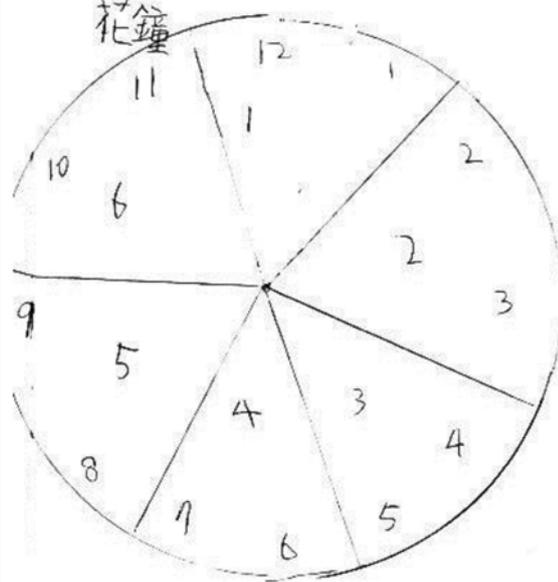
得到 0 分的有 60 人，占總人數的 20.34%。得到 0 分的作答類型可分為三種：第一種是答題空白，僅有 2 人是這種情形；第二種是受 60 分鐘影響， $60 \div 12 = 5$ 、 $350 \times 5 = 1750$ ，有 2 人，占總人數的 0.68%；第三種是胡亂作答，有 56 人，占總人數的 18.89%。



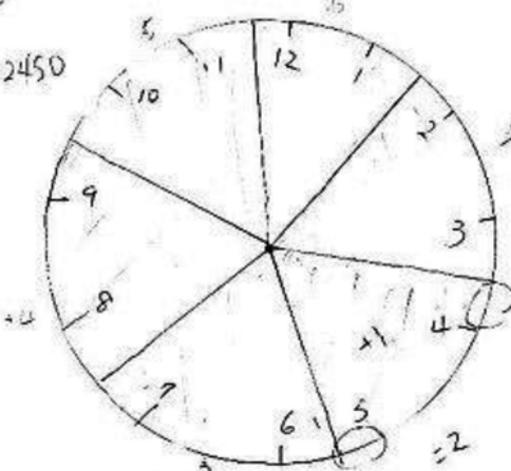
(2)答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-2-13 99 年度數學學力檢測建構反應題第一題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	<p>多出來的邊加起來正好算一格，兩格加起來是350朵，那一格會有$350 \div 2$朵，時鐘有12格所以是$350 \div 2 \times 12$或350×6，那就可以算出時鐘花園所可以種的花。</p> $350 \div 2 \times 12 = 2100$ $350 \times 6 = 2100$ <p>多出來的邊是指黑色部份沒滿一格的塗色部份。</p> <p>A = 2100 朵花</p>	<p>學生先估算不足一格的部分合起來也是一格，算出共有2格；他也發現解題有兩種方法，一是算出一格的數量再乘以12倍；二是全部有12格，部分有2格，乘以6倍就是全部的數量。</p>
2	2-A	<p>依上圖我估算總共有兩格，所以$350 \div 2 = 175$可以算出一格約可種175花。因為總共有12格所以$175 \times 12 = 2100$，總共可以種2100朵的花。</p> <p>A = 2100 朵</p>	<p>此類學生是透過直觀認定部分是2格，算出一格的數量再乘以12倍。</p>
2	2-B	<p>先拿量角器量已種花的部份，算出來是60度，一個圓是360度將360除以60度就表示已種花的部份分成6大塊，那一大塊的已種花部份就需要350朵花，所以將6大塊乘以350朵花，這樣一來，便可算出花鐘全部種滿花時，會有多少朵花。答案是：$350 \times 6 = 2100$ (朵)</p>	<p>此類學生透過量角器測量出已種花的部分是60度，整個360度圓是已種花的6倍而算出全部的數量。</p>

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-B	$360 \div 60 = 6$ $6 \times 350 = 2100$ <p>灰色部份是 60° 60° 是圓的 $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6} = 350$ 朵花</p> <p>A: 2100 朵花</p>	<p>此類學生透過圖示解題，找出灰色部分的角度是 60°，是整個圓的 $\frac{1}{6}$，也就是灰色乘以 6 倍就是整個圓的數量。</p>
1	1-A	<p>在這個時鐘內，可以像  一樣的 可以再分成 5 等份，所以：</p> $350 \times 5 = 1850$ $1850 + 350 = 2200$ <p>原來就有的</p> <p>A: 2200 朵</p>	<p>此類學生的概念清楚，但在計算上 ($350 \times 5 = 1850$) 出錯，有可能是誤把 $5 \times 5 = 35$，發生乘法的錯誤。</p>
1	1-A	<p> 會有 6 個 350 朵花鐘</p> $350 \times 6 = 2106$  <p>A: 2106 朵</p>	<p>此類學生知道全部是灰色部分的 6 倍，也能畫圖加以說明，但在抄寫答案時誤寫成 2106 朵而致錯誤。</p>



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
1	1-B	$3 \times 2 = 6$ $350 \times 6 = 2100$ A: 2100 朵	此類學生正確計算，但沒有說明計算的意義，如 $3 \times 2 = 6$ 是如何得知的，在計算過程中沒有交代。
1	1-C	$12 \div 2 = 6$ (較黑的部份是 12 份中的 2 份) $6 - 1 = 5$ (由於較黑的部份已算出，需要 350 朵花，所以要減一) $350 \times 5 = 1750$ (350 再乘 5，因為有 5 個 350) A: 1750 朵	此類學生了解全部是部分量的 6 倍，但誤解題意為要算出還沒種花的 5 個區塊，因此錯誤是因為誤解題意而造成的。
0	0-B	$60 \div 12 = 5$ $60 \times 5 = 300$ $350 \times 5 = 1750$ A: 1750 朵	此類學生受到時間 60 分鐘與 12 格的影響，不清楚題意的要求，只是將自己對時間有關的數字加以編排而發生錯誤。
0	0-X	$12 \div 2 = 6$ $3 + 1 = 7$ $350 \times 7 = 2450$  A: 約 2450 朵	此類學生透過圖示說明有 6 個灰色區域，但誤解「還要種滿一個花鐘」與「已種了 350 朵花」而發生錯誤。

從學生在本題的答題情形來看，我們發現學生在解決與生活經驗較有相關的問題時，其在估測部份是沒問題的，但在題意的理解、計算的熟練上都需要教師在教學上多留意與用心，因此我們提出以下的建議。

6. 教學建議：

(1) 加強題意的理解訓練

學生常常不清楚題目在問什麼而自行想像，從學生的解題表現上，發現學生對題意不清楚，因此教師在指導學生理解題意時應該多針對題目的內容再進行追問，直到學生了解題意為止，如「題目要我們求出什麼？」。

(2) 要求學生了解每一個計算步驟的意義

從學生的計算中，有些學生會計算，答案也正確，但卻無法得知解答是怎麼被計算出來的，其計算的每個步驟缺乏邏輯與相關性。因此，建議教師在課堂上針對解題步驟的次序與相關多做說明，讓學生理解，教師注重此點的重要性，學生也才能學會計算的邏輯與相關性。

(3) 熟練數字的計算

雖然是六年級的學童，但是對於簡單的九九乘法表還是不熟練，如誤解 $5 \times 5 = 35$ ，因此，建議教師在課堂上可進行計算的訓練，例如使用閃示牌，讓學生回答算式的解答，以加強學生的計算能力。



(五) 異分母分數的大小比較

1. 檢測年度：99 年度

2. 題目：

「比比看， $\frac{19}{40}$ 和 $\frac{18}{35}$ 哪一個分數比較大？(把你的想法寫下來，只有答案不予給分)」

3. 評量目的：

本試題主要評量學生異分母分數比大小時使用的策略，並且能正確的把想法寫下來。

4. 評閱標準：

評閱標準 2 分有 5 類、1 分有 2 類、0 分有 4 類，相關評閱標準與舉隅如下表：

表 2-2-14 99 年度數學學力檢測建構反應題第三題評閱標準

類別	評閱標準 (評閱舉隅)
2-A	以最小公倍數通分，答案正確。
2-B	以分母相乘通分，答案正確。
2-C	以 $\frac{1}{2}$ 為基準做比較，答案正確。
2-D	化成小數做比較，答案正確。
2-E	以兩分數相除做比較，答案正確。
1-A	答案正確，文字說明錯誤。
1-B	計算正確，但答案錯誤。
0-A	空白。
0-B	計算錯誤。
0-C	只看分子或分母做分數大小比較。
0-X	其他。

5. 評閱結果：

(1) 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-2-15 99 年度數學學力檢測建構反應題第三題評閱結果統計表

得分 類型	0				1		2					小計
	0A	0B	0C	0X	1A	1B	2A	2B	2C	2D	2E	
人數	13	30	17	46	3	5	125	45	4	6	1	295
百分比 (%)	4.41	10.17	5.76	15.59	1.02	1.69	42.37	15.25	1.36	2.03	0.34	
人數	106				8		181					
百分比 (%)	35.93				2.71		61.36					

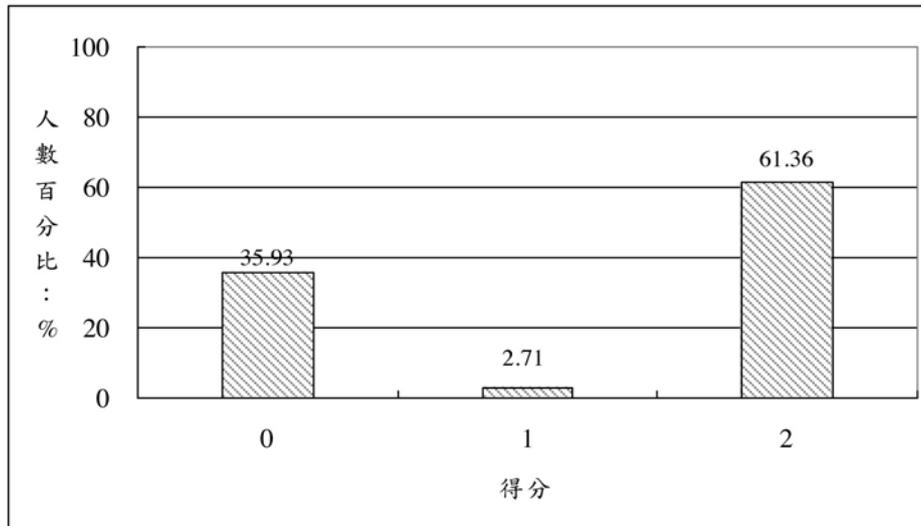


圖 2-2-6 99 年度數學學力檢測建構反應題第三題得分統計圖

由表 2-2-15 可以得知，本試題經評閱後得 2 分情形者有 181 人，占總人數的 61.36%，答對率為六成一。這些得到 2 分的答題類型又分為五種：第一種是以最小公倍數通分，得到正確答案，此種類型的學生有 125 人，占總人數的 42.37%；第二種是以分母相乘通分，得到正確答案，此種類型的學生有 45 人，占總人數的 15.25%；第三種是以 $\frac{1}{2}$ 為基準做比較，得到正確答案，此種類型的學生有 4 人，占總人數的 1.36%；第四種是化成小數做比較，得到正確答案，此種類型的學生有 6 人，占總人數的 2.03%；第五種是以兩分數相除做比較，得到正確答案，此種類型的學生有 1 人，占總人數的 0.34%。

評閱得到 1 分的有 8 人，占總人數的 2.71%。得到 1 分的答題類型又分為二種：第一種是答案正確，但文字說明錯誤，此種類型的學生有 3 人，占總人數的 1.02%；第二種是計算正確，但答案錯誤，此種類型的學生有 5 人，占總人數的 1.69%。

得到 0 分的有 106 人，占總人數的 35.93%。得到 0 分的答題類型又分為四種：第一種是該題的答案卷空白，沒有任何作答的痕跡，此種類型的學生有 13 人，占總人數的 4.41%；第二種是計算錯誤，此種類型的學生有 30 人，占總人數的 10.17%；第三種是只看分子或分母做分數大小比較，此種類型的學生有 17 人，占了總人數的 5.76%；第四種是胡亂作答，此種類型的學生有 46 人，占了總人數的 15.59%。



(2) 答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

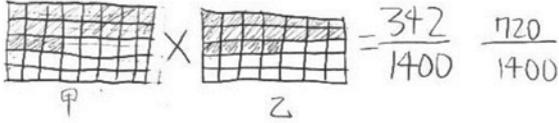
表 2-2-16 99 年度數學學力檢測建構反應題第三題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	$\frac{19}{40} = \frac{133}{280} \quad \frac{18}{35} = \frac{144}{280}$ <p>因為 $\frac{133}{280} < \frac{144}{280}$ 所以 $\frac{19}{40} < \frac{18}{35}$ A: $\frac{18}{35}$</p>	能用短除法找到分母的最小公倍數，通分成同分母後，比較分子大小，得到正確答案。
2	2-A	<p>$\frac{19}{40}$ 字面上看起來很大，但是 $\frac{19}{40}$ 和 $\frac{18}{35}$ 的分母不同，分子都相差一，就要比較分母，雖然 40 比較大，但分母較小，又加上分子只差一，所以我認為 $\frac{18}{35}$ 較大。擴分的話分子越大</p> $\frac{19}{40} = \frac{19 \times 7}{40 \times 7} = \frac{133}{280}$ $\frac{18}{35} = \frac{18 \times 8}{35 \times 8} = \frac{144}{280}$ <p>5 40 35 8 7 A: $\frac{18}{35}$ 較大</p>	<p>① 觀察兩個分數的分子差 1，而分母差 5，推論分母小的分數，經擴分後分子會變得比另一數較大，得解。</p> <p>② 為說明推論結果的正確性，仍將兩數通分成同分母後，比較分子大小，証之。</p>
2	2-B	$\frac{19}{40} = \frac{665}{1400}$ $\frac{18}{35} = \frac{720}{1400}$ $\frac{720}{1400} > \frac{665}{1400}$ <p>A: $\frac{18}{35}$</p>	分母相乘的方式通分，比較同分母分數的分子大小，得到正確答案。
2	2-B	<p>A: $\frac{18}{35}$ 大</p>	直接將兩數分母相乘通分，並使用數線圖表示通分的結果。

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-C	$\frac{18}{35} > \frac{19}{40}$ <p>因為 $\frac{18}{35}$ 大於 $\frac{1}{2}$ $\frac{19}{40}$ 小於 $\frac{1}{2}$</p> <p>A: $\frac{18}{35}$</p>	<p>學生發現兩數都接近 $\frac{1}{2}$，與 $\frac{1}{2}$ 相比後得到正確答案。</p>
2	2-C	$\frac{18}{35} > \frac{19}{40}$ <p>$\frac{19}{40}$，19 不到 40 的一半 (20)， $\frac{18}{35}$，18 已經到 35 的一半 (17...) 所以，$\frac{18}{35} > \frac{19}{40}$</p> <p>A: $\frac{18}{35}$</p>	<p>學生發現兩數其分母與分子的關係約為分母的一半左右，使用「一半」作為比較的基礎，推斷出正確答案。</p>
2	2-D	$\frac{19}{40} = 19 \div 40 = 0.475$ $\frac{18}{35} = 18 \div 35 = 0.51428\dots$ <p>分子除以分母得到小數，$\frac{19}{40}$ 的小數第一位是 4， $\frac{18}{35}$ 的小數第一位 5，4 比 5 小，所以 $\frac{18}{35}$ 大。</p>	<p>① 把分數看成分子、分母相除的結果，以小數表示。 ② 將兩個分數化成小數後，由十分位開始進行大小比較，得解。</p>
2	2-D	<p>把 $\frac{19}{40}$ 和 $\frac{18}{35}$ 化成小數就知道哪個比較大了。</p> $\frac{19}{40} = 0.4\dots$ $\frac{18}{35} = 0.5\dots$ <p>$0.5 > 0.4$</p> <p>A: $\frac{18}{35}$ 較大</p>	<p>① 將兩個分數化成小數，進行大小比較。 ② 由十分位即可比較出大小。</p>



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-E	$\frac{18}{35} = \frac{19}{40} = \frac{18}{35} \times \frac{10}{19}$ $= \frac{180}{665} = \frac{1}{133}$ $A = \frac{18}{35} > \frac{19}{40}$	將兩個分數相除進行比較，結果大於 1 時，即被除數大於除數，得解。
1	1-A	<p>計算： $\begin{array}{r} 5 \overline{)40} \quad 35 \\ \underline{8} \quad 7 \end{array}$</p> <p>想法： 分子愈小，擴分後的答案愈大。 分子愈大，擴分後的答案愈小。 $\frac{133}{280} < \frac{144}{280}$ $\frac{19}{40} = \frac{133}{280}$ $\frac{18}{35} = \frac{144}{280}$ A: $\frac{144}{280}$ 較大。</p>	① 以最小公倍數通分後，正確比較出答案。 ② 文字說明顯示分數概念錯誤，無論分子大小，擴分後的值不變。
1	1-A	<p>$\frac{18}{35}$ 比較大，因為 $\frac{18}{35}$ 的分母是 35，$\frac{19}{40}$ 的分母是 40，那就等於一個圓被分成 35 片，一個圓被分成 40 片，這樣被分成 35 片的圓，每一片都會比被分成 40 片的圓的每一片小，所以一個是 19，一個是 18，可以去乘查看。</p> $\frac{18}{35} > \frac{19}{40}$	① 認為同一個圓，分成 35 片比分成 40 片的每一片小，分數概念錯誤。 ② 仍強調以計算得到答案。
1	1-B	$5 \times 8 \times 7 = 280$ $\begin{array}{r} 5 \overline{)40} \quad 35 \\ \underline{8} \quad 7 \end{array}$ $\frac{19}{40} = \frac{133}{280}$ $\frac{18}{35} = \frac{144}{280}$ $\frac{144}{280} > \frac{133}{280}$ $A = \frac{133}{280} \text{ 比較大}$	計算完全正確，挑選答案時錯誤。
1	1-B	$\begin{array}{r} \times 7 \\ \frac{19}{40} = \frac{\square}{280} \\ \times 8 \times 7 \\ \frac{18}{35} = \frac{\square}{280} \\ \times 8 \\ \times 8 \times 7 = 280 \end{array}$ $\square = 19 \times 7$ $\square = 133$ $\square = 18 \times 8$ $\square = 144$ $\frac{19}{40} < \frac{18}{35}$ $A = \frac{19}{40} \text{ 大}$	計算、比大小都正確，總結的答錯誤。

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-B	$40 \rightarrow 40, 80, 120, 160, 200, 240, 280$ $35 \rightarrow 70, 105, 140, 175, 210, 245, 280$ $\frac{19}{40} \times 7 = \frac{133}{280}$ $\frac{18}{35} \times 7 = \frac{126}{280}$ $\therefore \frac{133}{280} > \frac{126}{280}$ $\therefore \frac{19}{40}$ 較大 $A: \frac{19}{40}$	① 找出最小公倍數，進行通分。 ② 計算錯誤，所以答案錯誤。
0	0-B	$\frac{19}{40} \times \frac{18}{35} = \frac{342}{1400}$ $\frac{18}{35} = \frac{720}{1400}$  $A: \frac{19}{40}$ 較大	① 書寫的形式不正確，仍可看出以兩數分母相乘進行通分。 ② 計算錯誤，所以答案錯誤。
0	0-C	我覺得 $\frac{19}{40}$ 比較大，因為他的分母是 40。 $\frac{19}{40} > \frac{18}{35}$ $A: \frac{19}{40}$	認為分母較大，則該分數較大。
0	0-C	$A: \frac{18}{35}$ 因為老師說過分母越小，就越大。	片斷擷取「分母越小，分母越大」，進行兩異分母分數的比較，導致錯誤。
0	0-X	$\frac{19}{40} < \frac{18}{35}$ 在分數中，分母和分子相差越少，就代表那個數比較大。 $A: \frac{18}{35}$ 大	① 分數概念不清楚。 ② 分子、分母差越少，越接近 1，仍無法比較出兩數的大小。
0	0-X	$\frac{19 \times 5}{40 \times 5} = \frac{95}{200}$ $\frac{18 \times 5}{35 \times 5} = \frac{90}{175}$ $\frac{95}{200} > \frac{90}{175}$ ✘ $A: \frac{95}{200} > \frac{90}{175}$	擴分後沒有得到相同的分母，所以仍無法比較兩分數大小。



從學生在本題的答題情形來看，得到正確答案的 61.63% 學生中，解題類型有五類。其中 57.62% 的學生使用通分方式比大小，有 42.37% 的學生以最小公倍數通分，15.25% 的學生直接把兩數分母相乘通分，都得到正確答案。值得注意的是在正確解題的學生當中有 1.36% 的學生使用分數量感，並透過中間數做間接比較，他們觀察到兩個分數與 $\frac{1}{2}$ 的關係，藉由與 $\frac{1}{2}$ 的比較得到正確答案；也有 2.03% 的學生將分數轉換成小數後比較出正確答案；另外 0.34% 學生將兩數相除，判斷商數是否大於 1，而得到正確答案。

部分正確答題的 2.71% 學生中，都能使用通分正確得到答案，但其中的 1.02% 學生在說明中表達出不正確的分數概念；其中的 1.69% 學生計算正確後，卻選錯答案。

錯誤達題的 35.93% 學生中，有 4.41% 的學生答案空白，沒有嘗試解題；有 10.17% 的學生計算錯誤；有 5.76% 的學生只關注分母的大小，或只關注分子的大小就決定答案；有 15.95% 的學生無法掌握分數的重要概念，徒具形式的做一些計算，仍無法比較出異分母分數的大小。

6. 教學建議：

- (1) 從使用文字說明的學生中答題表現得知，絕大部分都知道分母是等分切割數，切割越多，量越小；分子是真正具有的量，分子越大，表示取的量越多。唯似須加強指導上述概念是在相同基準量下及分割份數相同的情況下，則分子越大，該分數才會越大。如果是在兩個異分母分數的情況下，則不適於使用上述單一觀點（只看分子或分母）進行兩個分數的比較。
- (2) 綜觀學生答題表現，使用計算方式的有 7 成，顯示學生熟悉使用通分進行兩個異分母分數的比較；使用分數量感做間接比較的學生僅有 0.1 成，相差懸殊。建議教學過程中，進行分數與 0、 $\frac{1}{2}$ 、1 的比較，培養學生分數量感，並給予學生使用間接比較的訓練，幫助學生發展高層次比較的能力。在分數的測驗中，偶而加入使用分數量感的題目，亦可強化學生分數量感。
- (3) 異分母分數比大小的題目常被安排在填充題中，本題答案開放學生說明，可以看到學生的分數概念，也可以看到學生對分數的迷思想法。教學過程或命題中，適度的加入開放題目，蒐集學生迷思概念，有助老師適時進行補救教學。

(六) 表徵假分數

1. 檢測年度：101 年度

2. 題目：

一盒蘋果有 6 個，請畫圖表示 $\frac{8}{3}$ 盒蘋果。

3. 評量目的：

本試題主要在評量學生是否能掌握單位分數內容物為多個個物的情境，以及能否表徵假分數的意義。

4. 評閱標準：

評閱標準 2 分有 2 類、1 分有 2 類、0 分有 5 類，相關評閱標準與舉隅如下表：

表 2-2-17 101 年度數學學力檢測建構反應題第二題評閱標準

類別	評閱標準 (評閱舉隅)
2A	標示出一盒有 6 個，並正確圖示 $2\frac{2}{3}$ 盒或 $\frac{8}{3}$ 盒
2B	標示出一盒有 6 等份 (但未畫出蘋果個數)，並正確圖示 $2\frac{2}{3}$ 盒或 $\frac{8}{3}$ 盒
1A	標示出一盒有 3 等分 (但未標示出一盒有 6 個)，並正確圖示 $2\frac{2}{3}$ 盒或 $\frac{8}{3}$ 盒
1B	畫出 16 個蘋果或 16 份，但未標示出 1 盒有 6 個
0B	知道 1 盒有 6 個，知道 $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ ，但把 $\frac{2}{3}$ 盒圖示成 2 個蘋果
0C	知道一盒 6 個，把 $\frac{8}{3}$ 盒畫成 8 個
0D	畫出一盒 3 個，把 $\frac{8}{3}$ 盒畫成 8 個
0A	空白
0X	其他



5. 評閱結果：

(1) 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-2-18 101 年度數學學力檢測建構反應題第二題評閱結果統計表

得分類型	0					1		2		合計
	0A	0B	0C	0D	0X	1A	1B	2A	2B	
人數	2	34	61	10	24	6	6	132	22	297
百分比(%)	0.67	11.45	20.54	3.37	8.08	2.02	2.02	44.44	7.41	
人數	131					12		154		
百分比(%)	44.11					4.04		51.85		

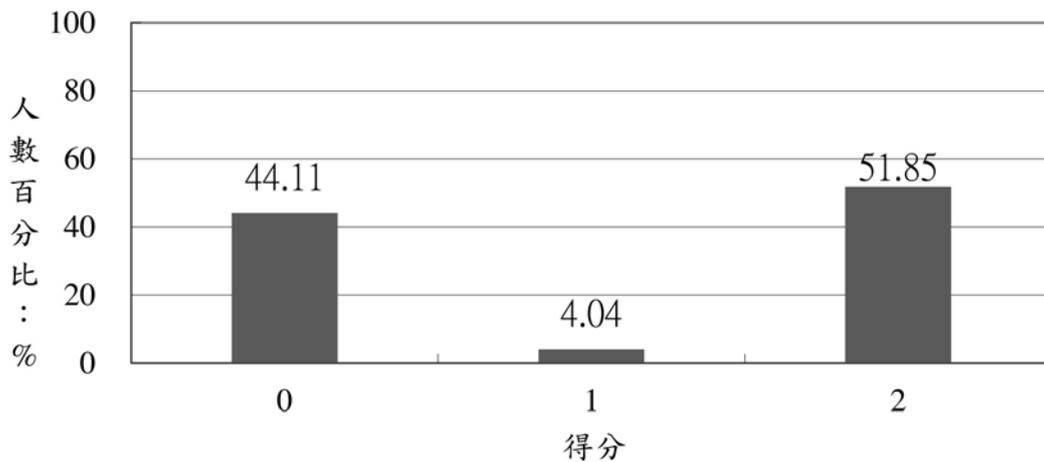


圖 2-2-7 101 年度數學學力檢測建構反應題第二題得分統計圖

由表 2-2-18 可以得知，本試題經評閱後得 2 分情形者有 154 人，占總人數的 51.85%，整體的答對率為五成二。得到 2 分的答題類型又分二種：第一種標示出一盒有 6 個，並正確圖示 $2\frac{2}{3}$ 盒或 $\frac{8}{3}$ 盒，得出正確答案，有 132 人，占總人數的 44.44%；第二種標示出一盒

有 6 等份（但未畫出蘋果個數），並正確圖示 $2\frac{2}{3}$ 盒或 $\frac{8}{3}$ 盒，有 22 人，占總人數的 7.41%。

評閱得到 1 分的有 12 人，占總人數的 4.04%。得到 1 分的答題類型又分二種：第一種標示出一盒有 3 等分（但未標示出一盒有 6 個），並正確圖示 $2\frac{2}{3}$ 盒或 $\frac{8}{3}$ 盒，有 6 人，占總人數的 2.02%；第二種畫出 16 個蘋果或 16 份，但未標示出 1 盒有 6 個，有 6 人，占總人數的 2.02%。

評閱得到 0 分的有 131 人，占總人數的 44.11%。這些得到 0 分的答題類型可分為五種：第一種是答題空白，有 2 人，占總人數的 0.67%；第二種知道 1 盒有 6 個，知道 $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ ，但把 $\frac{2}{3}$ 盒圖示成 2 個蘋果，有 34 人，占總人數的 11.45%；第三種知道一盒 6 個，

把 $\frac{8}{3}$ 盒畫成 8 個，有 61 人，占總人數的 20.54%；第四種畫出一盒 3 個，把 $\frac{8}{3}$ 盒畫成 8 個，有 10 人，占總人數的 3.37%；第五種其他，有 24 人，占總人數的 8.08%。

(2) 答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-2-19 101 年度數學學力檢測建構反應題第二題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A		<p>1. 用○代表蘋果，正確標示出一盒有 6 個。</p> <p>2. 先通成分母是 6，再化成帶分數。</p> <p>3. 正確標示 $2\frac{2}{3}$ 盒。</p> <p>※該生分數概念非常清楚。</p>
2	2-A		<p>1. 正確標示出一盒有 6 個蘋果。</p> <p>2. 將一盒 6 個平分成 3 份，每份是 $\frac{1}{3}$ 盒。</p> <p>3. 知道 $\frac{8}{3}$ 是 8 個 $\frac{1}{3}$ 合起的。</p> <p>※該生分數概念非常清楚。</p>
2	2-A		<p>雖然沒有任何算式，但是正確標示出一盒有 6 個，且知道 $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$。</p>
2	2-B		<p>雖然沒有畫出 1 盒有 6 個蘋果，但是正確將 1 平分成 6 份，透過 $\frac{8}{3} = \frac{16}{6}$，正確圖示 $2\frac{2}{3}$ 盒。</p>



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-B		<p>雖然沒有畫出 1 盒有 6 個蘋果，但是正確將 1 平分成 6 份，透過 $\frac{8}{3} = \frac{16}{6} = 2\frac{4}{6}$，正確圖示 $2\frac{2}{3}$ 盒。</p>
1	1-A		<p>知道 $\frac{8}{3}$ 盒是 $2\frac{2}{3}$ 盒，但未標示出一盒有 6 個</p>
1	1-B		<p>用算式算出 $\frac{8}{3}$ 盒蘋果總共有 16 個，只畫出 16 個蘋果，但未標示出 1 盒有 6 個。</p>
1	1-B		<p>知道 $\frac{8}{3}$ 盒蘋果總共有 16 個，只畫出 16 個蘋果，未標示出 1 盒有 6 個。</p>
0	0-B		<p>雖然知道 1 盒有 6 個，也知道 $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$，但卻把 $\frac{2}{3}$ 盒誤認為只有 2 個蘋果。顯示該類型的學生對單位分數內容物為多個個物是不理解的。</p>
0	0-B		<p>雖然知道 1 盒有 6 個，也知道 $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$，但卻把 $\frac{2}{3}$ 盒誤認為只有 2 個蘋果。顯示該類型的學生對單位分數內容物為多個個物是不理解的。</p>

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-C		<p>知道一盒 6 個，把 $\frac{8}{3}$ 盒畫成 8 個，顯示該類型的學生不理解假分數的意義，且對單位分數的內容物為多個個物是完全不理解。</p>
0	0-C		<p>知道一盒 6 個，但把 $\frac{8}{3}$ 盒畫成 8 個。顯示該類型的學生不理解假分數的意義，且對於單位分數的內容物為多個個物是不理解的。</p>
0	0-D		<p>誤以為 $\frac{8}{3}$ 就是一盒有 3 個，總共有 8 個；又受到題目中的一盒有 6 個的影響，因此又把 8 個分成 1 盒又 2 個，把 2 個當成 $\frac{2}{3}$ 盒，該類型的學生對單位分數的內容物為多個個物是不清楚的。</p>
0	0-D		<p>忽略了題目中一盒有 6 個，認為 $\frac{8}{3}$ 盒就是一盒有 3 個，分子 8 就是總共有 8 個。該類型的學生不理解單位分數內容物為多個個物。</p>
0	0-D	<p>- 盒 6 個 $3 \times 2 = 6$</p>	<p>知道 $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$，但誤以為 $\frac{8}{3}$ 盒就是一盒有 3 個，分子 8 就是共有 8 個，但從算式中顯示該生對單位分數的內容物為多個個物是完全不理解。</p>



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-X		熟悉假分數與帶分數的互換，知道 $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ ，然而不理解題意，對單位分數的內容物為多個個物是不理解的。
0	0-X		不理解題意，對分數的意涵及分子與分母的意義完全不理解。誤以為 $\frac{8}{3}$ 盒分母的3表示3份，分子的8是8份。
0	0-X		此種解題類型的孩子似乎知道 $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ ，但不理解題意，不了解分數中各種不同單位之間的關係。
0	0-X		

從學生在本題的答題情形來看，有 51.85% 的學生能夠正確透過圖示，清楚表達假分數的意涵，學生不僅能清晰描述該假分數所表示的整體量、單位分數量，且能區分單位「1」的量和單位分數的量；反觀有些答錯的學生在離散量(單位分數內容物為多個個物)的情境下，無法分辨 $\frac{8}{3}$ 的分母與分子各代表的意義；有些學生甚至不了解「1 盒」、「 $\frac{8}{3}$ 盒」、「1 盒有 6 個」及「8 個 $\frac{1}{3}$ 盒」等單位的意義。

96 年度學力檢測的建構反應題中亦出現過此種題型，題目為「一盒巧克力有 4 顆，請用畫圖表示 $\frac{5}{2}$ 盒巧克力。」當時答對 2 分的人數占 56.27%，答對 1 分的人數占 6.1%，0 分的人數占 37.63%。而今年類似的題型答對率比 96 年度下降了 4%，完全答錯(0 分)的人數卻增加了 6%，顯示學生對於單位分數內容物為多個個物的圖示表徵仍然有待加強。

6.教學建議：

從上述的分析中發現多達四成以上的學生對假分數的表徵意義不太清楚。因此我們提出以下的教學建議：

- (1) 進行分數單元教學時，應著重分數概念的教學，讓學生了解分數中各種不同單位間的關係：如「一盒蘋果有 6 個， $\frac{1}{3}$ 盒有幾個？」，教師應透過圖示指導學生看到各個單位的意涵，像「整體 1 是一盒有 6 個」，「 $\frac{1}{3}$ 盒是把一盒 6 個平分成三等份，每一等份有 2 個，並用圖示圈出來明顯表示。」而「 $\frac{8}{3}$ 盒是由 8 個 $\frac{1}{3}$ 盒所合起來」，透過圖示讓學生看到其間的關係，進而確切了解分數的意涵及分子與分母的意義。
- (2) 在分數的教學，應時常提醒學生整體 1 的量在哪裡？是多少？請學生指出來。
- (3) 建議老師平日教學或評量時，能夠讓學生用圖示來表徵單位分數內容物為多個個物的真分數或假分數，如「一盒蘋果有 8 個， $\frac{3}{4}$ 盒有幾個？」「一盒蘋果有 8 個， $\frac{5}{2}$ 盒有幾個？」…等，以加強孩子對分數的概念。



(七) 將分數正確標記在數線上

1. 檢測年度：101 年度

2. 題目：

3-2：在下面的數線上正確標示出 B 點，使 B 點在 $2\frac{4}{5}$ 的位置。你是怎麼標出 B 點的位置呢？把你的想法或做法寫下來。



3. 評量目的：

本試題主要在評量學生是否明白分數數線的意義，能否在 2 與 3 之間等分五分取第四分為 $2\frac{4}{5}$ 。

4. 評閱標準：

評閱標準 2 分有 2 類、1 分有 3 類、0 分有 4 類，相關評閱標準與舉隅如下表：

表 2-2-20 101 年度數學學力檢測建構反應題第 3-2 題評閱標準

類別	評閱標準 (評閱舉隅)
2A	把數線上的單位 1 平分成 5 份或 10 份，並正確標示 $2\frac{4}{5}$ 的位置，且清楚說明想法
2B	正確標示 $2\frac{4}{5}$ 的位置 (未把數線上的單位 1 平分成 5 份或 10 份)，並清楚說明想法
1A	正確標示 $2\frac{4}{5}$ 的位置，但未做說明或說明不清楚
1B	說明清楚，但未正確標示 $2\frac{4}{5}$ 的位置
1C	以約估方式標示 $2\frac{4}{5}$ 的位置並說明想法
0B	在 2~3 之間或 0~1 之間，實測 2.8 公分標示 $2\frac{4}{5}$ 位置
0C	把 2 到 3 的區間平分成 5 段，而以第 4 段作為 $2\frac{4}{5}$ 的位置
0A	空白
0X	其他

5. 評閱結果：

(1) 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-2-21 101 年度數學學力檢測建構反應題第 3-2 題評閱結果統計表

得分類型	0				1			2		合計
	0A	0B	0C	0X	1A	1B	1C	2A	2B	
人數	8	10	10	76	69	5	7	72	40	297
百分比(%)	2.69	3.37	3.37	25.59	23.23	1.68	2.36	24.24	13.47	
人數	104				81			112		
百分比(%)	35.02				27.27			37.71		

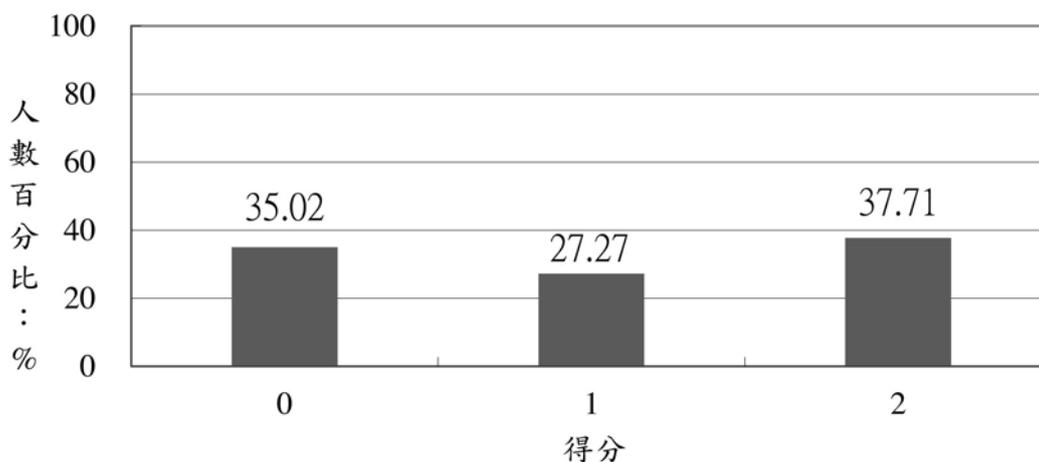


圖 2-2-8 101 年度數學學力檢測建構反應題第 3-2 題得分統計圖

由表 2-2-21 可以得知，本試題經評閱後得 2 分情形者有 112 人，占總人數的 37.71%，答對率為三成八。得到 2 分的答題類型又分為二種：第一種是把數線上的單位 1 平分成 5 份或 10 份，並正確標示 $2\frac{4}{5}$ 的位置，且清楚說明想法，得到正確答案，此種類型的學生有 72 人，占總人數的 24.24%；第二種是雖然未把數線上的單位 1 平分成 5 份或 10 份，但仍能正確標示 $2\frac{4}{5}$ 的位置，並清楚說明想法，得到正確答案，此種類型的學生有 40 人，占總人數的 13.47%。

評閱得到 1 分的有 81 人，占總人數的 27.27%。得到 1 分的答題類型又分為三種：第一種是正確標示出 $2\frac{4}{5}$ 的位置，但未做說明或說明不清楚，此種類型的學生有 69 人，占總人數的 23.23%；第二種是說明清楚，但未正確標示出 $2\frac{4}{5}$ 的位置，此種類型的學生有 5 人，占總人數的 1.68%；第三種是以約估方式標示出 $2\frac{4}{5}$ 的位置並說明想法，此種類型的學生有 7 人，占總人數的 2.36%。

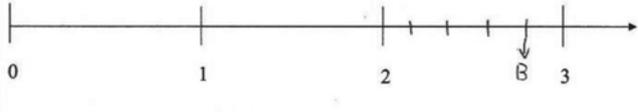
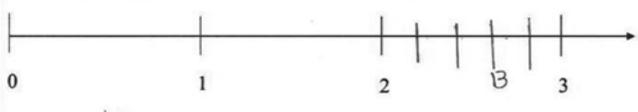
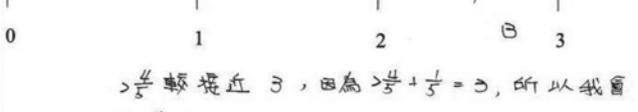


得到 0 分的有 104 人，占總人數的 35.02%。得到 0 分的答題類型又分為四種：第一種是該題的答案卷空白，此種類型的學生有 8 人，占總人數的 2.69%；第二種是在 2~3 之間或 0~1 之間，實測 2.8 公分標示 $2\frac{4}{5}$ 位置，此種類型的學生有 10 人，占總人數的 3.37%；第三種是把 2 到 3 的區間平分成 5 段，而以第 4 段作為 $2\frac{4}{5}$ 的位置，此種類型的學生有 10 人，占總人數的 3.37%；第四種是其他錯誤類型，此種類型的學生有 76 人，占總人數的 25.59%。

(2) 答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-2-22 101 年度數學學力檢測建構反應題第 3-2 題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A		能把數線上的單位 1 平分成 10 份，並將分數化為小數，正確標示出 $2\frac{4}{5}$ 的位置。
2	2-A		能把數線上的單位 1 平分成 10 份，將 $\frac{4}{5}$ 通成分母是 10 的分數，再正確標示出 $2\frac{4}{5}$ 的位置，且清楚說明想法。
2	2-B		雖未把數線上的單位 1 平分成 5 份或 10 份，但是用實測長度的方法，正確標示 $2\frac{4}{5}$ 的位置，並清楚說明想法。
2	2-B		雖未把數線上的單位 1 平分成 5 份或 10 份，但是用實測長度的方法正確的標示出 $2\frac{4}{5}$ 的位置，說明非常清楚。

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
1	1-A	 <p>我尺量，發現2到3之間的間隔是5公分，因此代表每$\frac{1}{5}$就是1公分，所以3到4之間的距離就是$2\frac{4}{5}$的所在地。</p>	<p>雖正確標示$2\frac{4}{5}$的位置，但文字說明中：「3到4之間的距離就是$2\frac{4}{5}$的所在地。」是不正確的。</p>
1	1-A	 <p>先把數線中的格子畫上去，再找$2\frac{4}{5}$在那一個格子上。</p>	<p>雖正確標示出$2\frac{4}{5}$的位置，但文字說明中：「先把數線中的格子畫上去…」不夠清楚。</p>
1	1-B	 <p>$2\frac{4}{5}$ 整數是2，而4是5份中的4份，所以再數線2~3之內分成5等份，第4份就是$2\frac{4}{5}$</p>	<p>說明正確，但標示錯誤，把$2\frac{4}{5}$標示在$2\frac{3}{5}$的位置，此類型的學生可能從2的位置開始數起。</p>
1	1-B	 <p>A: 因為$2\frac{4}{5}$的2就表示2個完整，在畫出5等份，第4份就是$2\frac{4}{5}$</p>	<p>雖然說明很清楚，但卻未標示出$2\frac{4}{5}$的位置。</p>
1	1-C	 <p>$> \frac{4}{5}$ 較接近 3，因為 $> \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 3$，所以我會把 $> \frac{4}{5}$ 點在 3 附近。</p>	<p>從該生的說明中知道他是用約估的方式標示$2\frac{4}{5}$的位置。</p>
1	1-C	 <p>A: $1\frac{4}{5} = 2.8$ $2.8 > 2.5 (2 + \frac{1}{2} = 2.5)$ $2.8 < 3$ 2.8 在 2.7 和 2.9 之間</p>	<p>先找出$2\frac{4}{5} = 2.8$ 再以約估方法找出$2.8 < 3$ 及在 2.7 和 2.9 之間。</p>



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-B		知道 $2\frac{4}{5} = 2.8$ ，但卻誤以為 2.8 就是 2.8 公分，因此從 0 起量出 2.8 公分的位置，此種解題類型的孩子分數概念仍不清楚。
0	0-C		沒有文字說明，但由圖示能解讀該生把 2 到 3 的區間平分成 5 段，而以第 4 段的區間作為 $2\frac{4}{5}$ 的位置。
0	0-C		把 2 到 3 的區間平分成 5 段，而以第 4 段作為 $2\frac{4}{5}$ 的位置。
0	0-X		文字說明表示：「把 0~3 的線分成 15 份，再取出第 14 份」，但數線上卻又標示在 $2\frac{3}{5}$ 的位置，該生可能是從 0 開始算第 1 份，以致造成錯誤。

從學生在本題的答題情形來看，僅有 38% 左右的六年級學生，能正確標示及說明數線上刻度 2 與 3 之間 $2\frac{4}{5}$ 的位置；有近 27% 的學生，只能以約估、標示或說明正確 $2\frac{4}{5}$ 的位置；也有近 35% 的學生均無法標示或說明清楚如何在給定的刻度 2 和 3 之間取 $2\frac{4}{5}$ 的位置。顯示學生在以文字及將分數表徵在數線上的概念，仍有待加強；而在分數數線的學習上，則仍有刻度與間距、相對單位 ($2\frac{4}{5}$ 個單位長) 與普遍單位 ($2\frac{4}{5}$ 公分) 混淆等迷思概念。

6.教學建議：

從上述的分析中發現不到四成的學生，能完整標示及說明如何在數線上找到指定的分數或小數；也有近三成學生，無法標示或說明清楚指定的分數或小數如何在數線上取得。因此我們提出以下的教學建議：

- (1) 數線教學時，應教導學生釐清以分數及小數所代表的意義，是間隔(量)還是刻度(數)。不帶單位時的分數與小數，是以什麼為比較基準(單位 1)也應引導學生分辨清楚。
- (2) 命題類型應多元化，讓學生能經驗不同的答案表徵，數學考試不只考計算，也需要畫圖及文字敘述的題型。
- (3) 多開放教學環境為發表及討論，讓學生多面向聽到彼此不同的解題策略，激發更多的想法，以練就逐步將自己的答案描繪得更清楚。
- (4) 讓學生了解數線上的一個單位長並非一定是 1 公分。
- (5) 命題類型應多元化，讓學生能嘗試不同的答案表徵，數學考試不只考計算，也需要畫圖及文字說明的題型。
- (6) 平日教學時，多讓學生發表及討論，鼓勵學生說出或寫出為何如此作答的原因，一方面可以訓練學生的語文表達能力，一方面也可以了解學生的解題策略及想法，並且讓學生知道同學之間彼此不同的解題策略，刺激其多元思考，也可以提供老師補救教學的參考。



(八) 表達等值分數的意義

1. 檢測年度：102 年度

2. 題目：

媽媽買了兩個一樣大的蛋糕，一個給哥哥，一個給妹妹，哥哥吃了 $\frac{2}{3}$ 個，

妹妹吃了 $\frac{4}{6}$ 個。

(1) 請在下圖中分別畫出 $\frac{2}{3}$ 個、 $\frac{4}{6}$ 個蛋糕。

① $\frac{2}{3}$ 個



② $\frac{4}{6}$ 個



(2) 誰吃得比較多? 把你的想法寫下來。

3. 評量目的：

本試題主要在評量學生是否瞭解分數整體 1 及分子與分母所代表的意義，並能表達出等值分數的意義。

4. 評量標準

(1) 第 2-1-① 題評閱標準，2 分有 2 類、0 分有 5 類，相關評閱標準與舉隅如下表：

表 2-2-23 102 年度數學學力檢測建構反應題第 2-1-① 題評閱標準

類別	評閱標準
2A	將 1 個蛋糕平分成 3 份，標示出其中的 2 份，表示 $\frac{2}{3}$ 個蛋糕。
2B	將 1 個蛋糕平分成 6 份，標示出其中的 4 份，表示 $\frac{2}{3}$ 個蛋糕。
0A	空白。
0B	將 1 個蛋糕平分成 6 份，標示出其中的 2 份，表示 $\frac{2}{3}$ 個蛋糕。
0C	將 1 個蛋糕的一部份平分成 3 份，標示出其中的 2 份，表示 $\frac{2}{3}$ 個蛋糕。

0D	將 1 個蛋糕平分成 6 份，標示出其中的 3 份，表示 $\frac{2}{3}$ 個蛋糕。
0X	其他。

(2) 第 2-1-②題評閱標準，2 分有 1 類、0 分有 2 類，相關評閱標準與舉隅如下表：

表 2-2-24 102 年度數學學力檢測建構反應題第 2-1-②題評閱標準

類別	評閱標準
2A	將 1 個蛋糕平分成 6 份，標示出其中的 4 份，表示 $\frac{4}{6}$ 個蛋糕。
0A	空白。
0X	其他。

(3) 第 2-2 題評閱標準，2 分有 1 類、0 分有 2 類，相關評閱標準與舉隅如下表：

表 2-2-25 102 年度數學學力檢測建構反應題第 2-2 題評閱標準

類別	評閱標準
2A	回答一樣多。利用第 1 小題的 $\frac{2}{3}$ 個和 $\frac{4}{6}$ 個的圖示一樣大作說明。
2B	回答一樣多。利用擴分或約分的方法得出 $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ 作說明。
2C	回答一樣多。利用通分的方法(但分母不是 6)得出 $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ 作說明。
2D	回答一樣多。因為 $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ ，但未說明 $\frac{2}{3}$ 為何等於 $\frac{4}{6}$ 。
1A	回答一樣多，但使用 說明(理由錯誤)。
1B	回答一樣多，理由不合理或不清楚。(非 1A 類型)
1C	僅回答一樣多，未有其他說明。
0A	空白。
0B	妹妹多。
0C	哥哥多。
0X	其他。



5. 評閱結果：

(1) 題目 2-1-① 畫出 $\frac{2}{3}$ 個蛋糕



① 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-2-26 102 年度數學學力檢測建構反應題第 2-1-① 題評閱結果統計表

得分 類型	0					2		合計
	0A	0B	0C	0D	0X	2A	2B	
人數	4	16	9	2	51	546	19	647
百分比 (%)	0.62	2.47	1.39	0.31	7.88	84.39	2.94	
人數	82					565		
百分比 (%)	12.67					87.33		

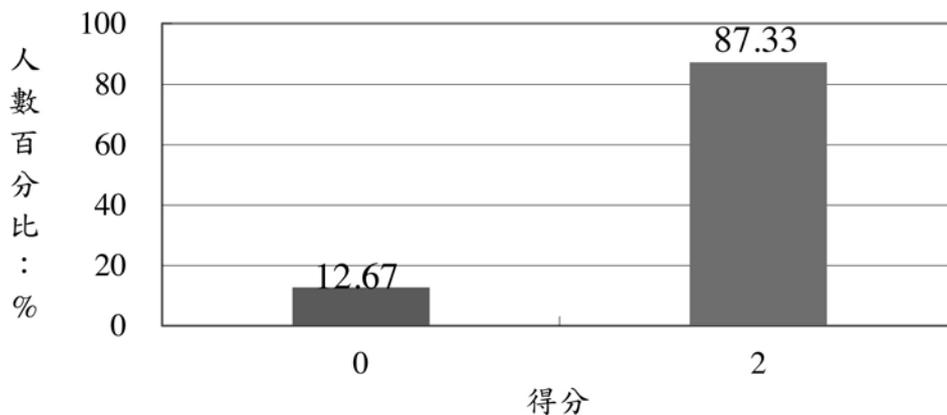


圖 2-2-9 102 年度數學學力檢測建構反應題第 2-1-① 題得分統計圖

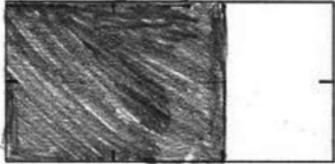
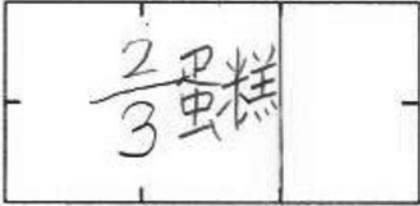
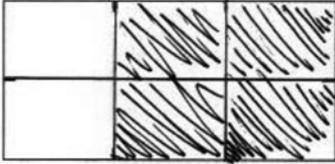
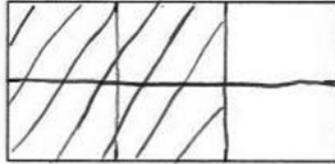
由表 2-2-26 可以得知，本試題經評閱後得 2 分情形者有 565 人，占總人數的 87.33%。得到 2 分的答題類型又分二種：第一種是能將整體 1 平分成 3 份標示其中 2 份，得出正確答案，有 546 人，占總人數的 84.39%；第二種是將整體 1 平分成 6 份標示其中 4 份，有 19 人，占總人數的 2.94%。

評閱得到 0 分的有 82 人，占總人數的 12.67%。這些得到 0 分的答題類型可分為五種：第一種是答題空白，有 4 人，占總人數的 0.62%；第二種是將整體 1 平分成 6 份，標示出

其中的 2 份，表示 $\frac{2}{3}$ ，有 16 人，占總人數的 2.47%；第三種是整體 1 的一部份平分成 3 份，標示出其中的 2 份，表示 $\frac{2}{3}$ ，有 9 人，占總人數的 1.39%；第四種是將整體 1 平分成 6 份，標示出其中的 3 份，表示 $\frac{2}{3}$ ，有 2 人，占總人數的 0.31%；第五種是其他錯誤圖示，有 51 人，占總人數的 7.88%。

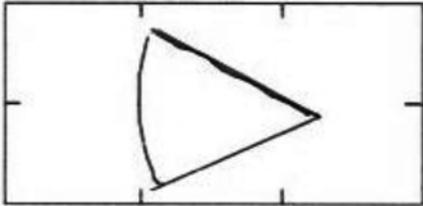
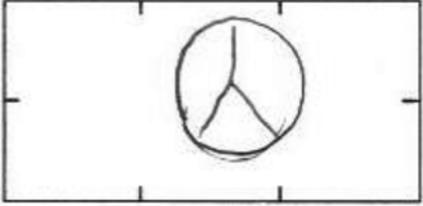
②答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-2-27 102 年度數學學力檢測建構反應題第 2-1-①題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	<p>① $\frac{2}{3}$ 個</p> 	能依圖形給的平分點，將 1 個蛋糕平分為 3 份，並正確標示出其中 2 份為 $\frac{2}{3}$ 個蛋糕。
2	2-A	<p>① $\frac{2}{3}$ 個</p> 	能依圖形給的平分點，找到 1 個蛋糕的 $\frac{2}{3}$ 。
2	2-B	<p>① $\frac{2}{3}$ 個</p> 	能依圖形給的平分點，將 1 個蛋糕平分為 6 份，標示出其中 4 份，視為 $\frac{2}{3}$ 個蛋糕。
2	2-B	<p>① $\frac{2}{3}$ 個</p> 	能依圖形給的平分點，將 1 個蛋糕平分為 6 份，標示出其中 4 份，視為 $\frac{2}{3}$ 個蛋糕。

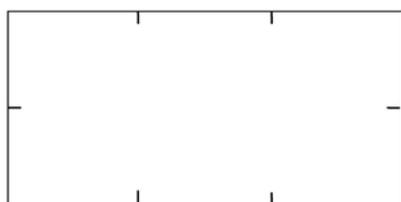


得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-B	<p>① $\frac{2}{3}$ 個</p>	<p>依圖形給的平分點，將 1 個蛋糕平分為 6 份，標示出其中 2 份，即視為 $\frac{2}{3}$ 個蛋糕。應為受分子 2 的影響，才標示 2 份。</p>
0	0-B	<p>① $\frac{2}{3}$ 個</p>	<p>依圖形給的平分點，將 1 個蛋糕平分為 6 份，標示出其中 2 份，即視為 $\frac{2}{3}$ 個蛋糕。應為受分子 2 的影響，才標示 2 份。</p>
0	0-C	<p>① $\frac{2}{3}$ 個</p>	<p>依圖形給的平分點，將 1 個蛋糕的「一部份」平分成為 3 份並標示出其中 2 份，即視為 $\frac{2}{3}$ 個蛋糕。應為受分母 3 的影響，才先標示 3 份為整體 1，再標示 2 份為 $\frac{2}{3}$ 個蛋糕。</p>
0	0-C	<p>① $\frac{2}{3}$ 個</p>	<p>依圖形給的平分點，將 1 個蛋糕的「一部份」平分成為 3 份並標示出其中 2 份，即視為 $\frac{2}{3}$ 個蛋糕。應為受分母 3 的影響，才先標示 3 份為整體 1，再標示 2 份為 $\frac{2}{3}$ 個蛋糕。</p>
0	0-D	<p>① $\frac{2}{3}$ 個</p>	<p>將 1 個蛋糕平分成為 6 份並標示出其中 3 份，恐受分母影響而直接標記分母份數。</p>

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-X	<p>① $\frac{2}{3}$ 個</p> 	<p>在蛋糕圖示中畫出扇形來標示 $\frac{2}{3}$ 個蛋糕，對題目的整體 1 不清楚或受平時分數教學表徵圖形皆為圓形影響所致。</p>
0	0-X	<p>① $\frac{2}{3}$ 個</p> 	<p>在蛋糕圖示中畫出 1 個圓形來當整體 1，並意圖平分成 3 份，顯示對題目的整體 1 不清楚或受平時分數教學表徵圖形皆為圓形影響所致。</p>

從學生在本題的答題情形來看，有高達 87% 的學生能正確標示出 $\frac{2}{3}$ ，但也有近 13% 的學生無法辨識出整體 1 及分數中分母與分子代表的意義，這些學生因分數概念較不完整，有可能受到圖形平分點為不分 3 份影響而答錯。

(2) 題目 2-1-② 畫出 $\frac{4}{6}$ 個蛋糕



① 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-2-28 102 年度數學學力檢測建構反應題第 2-1-② 題評閱結果統計表

得分 類型	0		2	合計
	0A	0X	2A	
人數	4	48	595	647
百分比(%)	0.62	7.42	91.96	
人數	52		595	
百分比(%)	8.04		91.96	

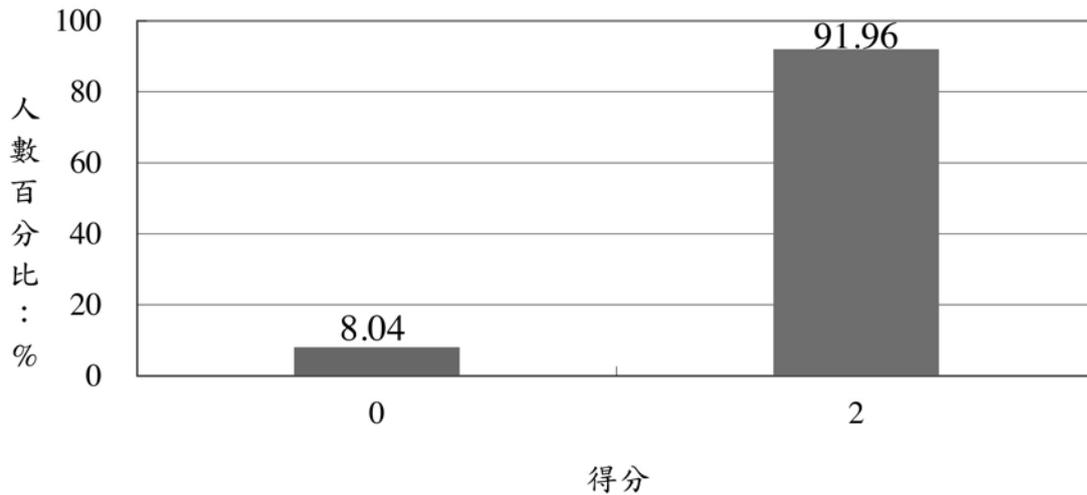


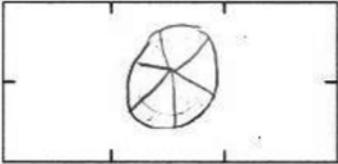
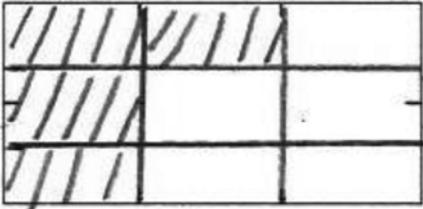
圖 2-2-10 102 年度數學學力檢測建構反應題第 2-1-②題得分統計圖

由表 2-2-28 可以得知，本試題經評閱後得 2 分情形者有 595 人，占總人數的 91.96%。評閱得到 0 分的有 52 人，占總人數的 12.67%。這些得到 0 分的答題類型可分為二種：第一種是答題空白，有 4 人，占總人數的 0.62%；第二種為其他錯誤的標示方法，有 48 人，占總人數的 7.42%。

②答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-2-29 102 年度數學學力檢測建構反應題第 2-1-②題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	② $\frac{4}{6}$ 個 	能將整體 1 平分成 6 份標示出其中 4 份
2	2-A	② $\frac{4}{6}$ 個 	能將整體 1 平分成 6 份標示出其中 4 份

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-X	<p>② $\frac{4}{6}$ 個</p> 	畫形內畫出另一個整體 1 的圓分成 6 份
0	0-X	<p>② $\frac{4}{6}$ 個</p> 	將圖形分成 9 份標示其中 4 份

從學生在本題的答題情形來看，從學生在本題的答題情形來看，有高達近 92% 的學生能正確標示出 $\frac{4}{6}$ ，這與圖形平分點恰可平分 6 份應有關係，顯示學生對已可平分為分母份數，再標示分子份數的題目，因此答題情形佳。

(3) 題目 2-2 誰吃得比較多? 把你的想法寫下來。

① 評閱結果分析

本試題經評閱後得分情形統計表及統計圖如下所示：

表 2-2-30 102 年度數學學力檢測建構反應題第 2-2 題評閱結果統計表

得分 類型	0				1			2				合計
	0A	0B	0C	0X	1A	1B	1C	2A	2B	2C	2D	
人數	18	32	31	4	22	36	101	56	223	9	115	647
百分比 (%)	2.78	4.95	4.79	0.62	3.40	5.56	15.61	8.66	34.47	1.39	17.77	
人數	85				159			403				
百分比 (%)	13.14				24.57			62.29				

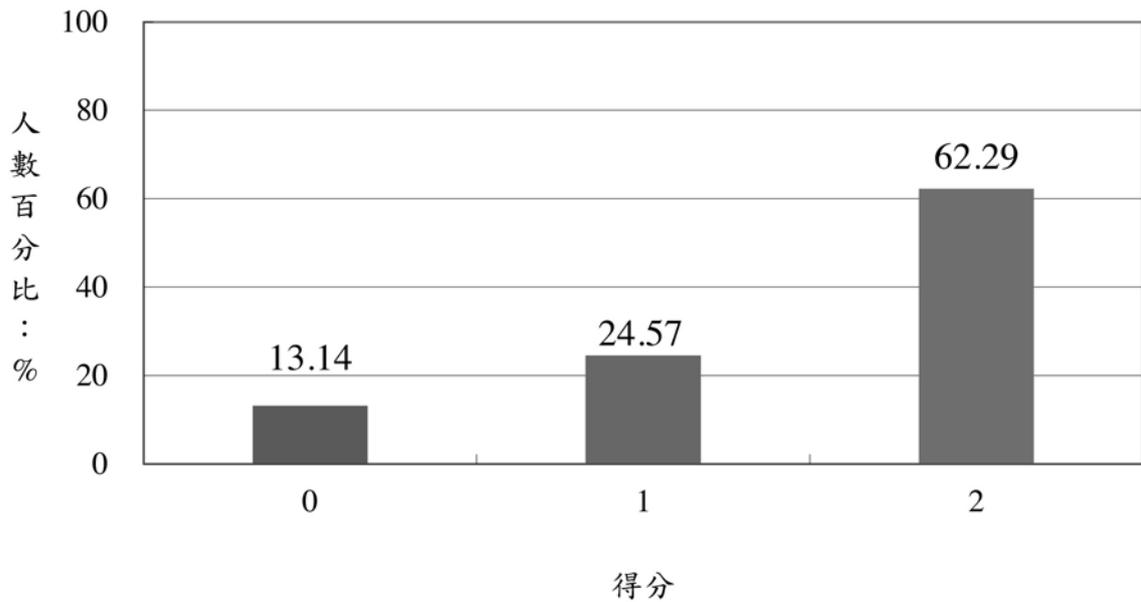


圖 2-2-11 102 年度數學學力檢測建構反應題第 2-2 題得分統計圖

由表 2-2-30 可以得知，本試題經評閱後得 2 分情形者有 403 人，占總人數的 62.29%。

得到 2 分的答題類型又分四種：第一種是能利用第 1 小題的 $\frac{2}{3}$ 個和 $\frac{4}{6}$ 個的圖示一樣大作說明，得出正確答案，有 56 人，占總人數的 8.66%；第二種是利用擴分或約分的方法得出 $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ 作說明。有 223 人，占總人數的 34.37%；第三種是利用通分的方法(但分母不是 6)得出 $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ 作說明，有 9 人，占總人數的 1.39%；第四種是直接說明 $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ ，但未說明 $\frac{2}{3}$ 為何等於 $\frac{4}{6}$ ，有 115 人，占總人數的 17.77%。

評閱得到 1 分的有 159 人，占總人數的 24.57%。得到 1 分的答題類型又分三種：第一種是能回答一樣多，但使用說明或理由錯誤，有 22 人，占總人數的 3.4%；第二種是能回答一樣多，但理由不合理或不清楚，有 36 人，占總人數的 5.56%；第三種是能回答一樣多但沒有說明理由，有 101 人，占總人數的 15.61%。

評閱得到 0 分的有 85 人，占總人數的 13.14%。這些得到 0 分的答題類型可分為四種：第一種是答題空白，有 18 人，占總人數的 2.78%；第二種是回答妹妹多，有 32 人，占總人數的 4.95%；第三種是回答哥哥多，有 31 人，占總人數的 4.79%；第四種是其他錯誤回答，有 4 人，占總人數的 0.62%。

② 答題類型分析

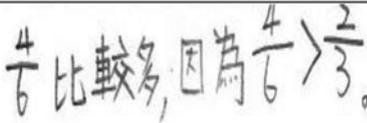
在第 2-2 題中學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-2-31 102 年度數學學力檢測建構反應題第 2-2 題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	<p>依照上面畫斜線的部分哥哥和妹妹的面積一樣大所以兩人吃得蛋糕是一樣多的</p> <p>A: 一樣多</p>	<p>能利用 $\frac{2}{3}$ 個蛋糕及 $\frac{4}{6}$ 個蛋糕的圖形一樣大，來回答一樣多。</p>
2	2-A	<p>哥哥和妹妹吃的一樣多，雖然一個蛋糕分成三份是一份，一個分成六份是四分，但如吐圖，兩份畫起來是一樣多的。</p>	<p>能利用 $\frac{2}{3}$ 個蛋糕及 $\frac{4}{6}$ 個蛋糕的圖形一樣大，來回答一樣多。</p>
2	2-B	<p>一樣多。因為 $\frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3}$，$\frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6}$。</p>	<p>利用擴分或約分的算則與等式得出兩人吃得一樣多。</p>
2	2-B	<p>我覺得兩個人吃的一樣多。因為 $\frac{2}{3}$ 的分母和分子都是 $\frac{1}{3}$ 的兩倍換句話說 $\frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}}$ 所以 $\frac{2}{3}$ 也會等於 $\frac{4}{6}$。</p>	<p>利用擴分或約分的文字說明，回答兩人吃得一樣多。</p>
2	2-C	<p>$\frac{2}{3} = \frac{12}{18}$ $\frac{12}{18} = \frac{12}{18}$ $\frac{4}{6} = \frac{12}{18}$ A: 一樣多</p>	<p>將兩分數通分為分母 18 的同分母分數，發現兩分數均為 $\frac{12}{18}$，而找到兩人吃得一樣多</p>
2	2-D	<p>吃得一樣多</p> <p>哥哥吃了 $\frac{2}{3}$ = 一個蛋糕平分成三份哥哥吃了兩份 妹妹吃了 $\frac{4}{6}$ = 一個蛋糕平分成六份妹妹吃了四份</p>	<p>能回答一樣多，但為針對為何 $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ 作說明。</p>
2	2-D	<p>① 一樣多 ② 因為 $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$</p>	<p>能回答一樣多，但為針對為何 $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ 作說明。</p>



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
1	1-A	$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6}$ <p>A: 一樣多</p> <p>∴把$\frac{2}{3} \times 2$之後就會變成$\frac{4}{6} = \frac{4}{6}$</p> <p>∴$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$就代表兩人吃了一樣多</p>	能回答一樣多，但理由說明成 $\frac{2}{3}$ 乘以2等於 $\frac{4}{6}$ ，是錯誤的。此生疑似將分數乘以整數當作擴分。
1	1-A	我覺得兩個人一樣多，只是哥哥是大口的品嚐蛋糕，而妹妹是慢慢的品嚐。	能回答一樣多，但理由回答為品嚐的方式不同不影響分數大小是錯誤的回答。
1	1-B	一樣多 3的倍數有6 2的倍數有4 所以兩個一樣多。	能回答一樣多，但理由以3及2的倍數說明，不清楚何意。
1	1-B	一樣多 因為妹妹吃 $\frac{2}{3}$ 個就等於哥哥吃 $\frac{1}{3}$ 個	能回答一樣多但理由說明不知與題意的關係為何。
1	1-C	我覺得他們吃的一樣多。	只回答一樣多，未有其他說明。
0	0-B	A: 妹妹 因為妹妹吃了4個，哥哥只有吃2個	回答妹妹多，且理由以妹妹吃的份數多於哥哥吃的。
0	0-B	$\frac{2 \times 4}{3 \times 2} = \frac{4}{6}$ <p>共同的</p> <p>A: 把分母分別乘以公數 A: 妹妹</p>	回答妹妹多，且理由錯誤。
0	0-C	哥哥吃的比較多， 因為妹妹吃 $\frac{2}{3}$ 個， 哥哥是 $\frac{1}{3}$ 個，這樣子 比較哥哥吃的比較多。	回答哥哥多且理由未說明清楚。
0	0-C	A: 哥哥 ∵ 因為 $\frac{2}{3}$ 最接近1，就會大於 $\frac{1}{3}$ 。	回答哥哥多，且理由錯誤。

得分	類型	解題類型舉隅	解題(錯誤)類型分析
0	0-X		回答 $\frac{4}{6}$ 比較多而沒有回答妹妹或哥哥多, 且理由 $\frac{4}{6} > \frac{2}{3}$ 是錯誤的。
0	0-X		沒有回答誰吃的比較多, 只寫了一個錯誤的分數減法。

從學生在本題的答題情形來看, 有 62% 左右的學生能正確說明等值分數 $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, 而能以第 1 小題圖示為一樣多的結果來說明等值分數相等的則約佔 9%, 這些學生顯示能由圖示明確證明等值分數相等的原因, 屬概念十分清楚的表徵, 有約 34% 則以約分或擴分的意義或算則來說明相等; 也有近 25% 的學生只能明白 $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, 但無法說明(或說不清楚)為何相等。

6. 教學建議:

從上述的分析中發現九成左右的學生能正確標示出 $\frac{2}{3}$ 及 $\frac{4}{6}$, 但在說明兩者是否相等的等值分數意義時, 卻只有 62% 的學生可以正確說明。因此我們提出以下的教學建議:

- (1) 教學等值分數時, 應由具體平分的情境, 理解可以再細分的方式, 得到: 「同一分數, 當分母細分為 2 倍時, 分子也同時細分為兩倍, 而此分數不變」結果。四年級時, 需以此方式帶領學生認識等值分數做概念理解; 五年級才是以計算方式求得等值分數。
- (2) 本題組第 1 小題引導學生圖示出 $\frac{2}{3}$ 及 $\frac{4}{6}$ 再於第 2 小題中求問 $\frac{2}{3}$ 是否等於 $\frac{4}{6}$, 僅有約 9% 的學生明白以圖形中 $\frac{2}{3}$ 與 $\frac{4}{6}$ 的大小一樣來說明等值分數相等, 有 34% 的學生是以約分或擴分的原因來解釋等值分數相等, 前者能明確記得等值分數的概念由來, 顯示其等值分數之等值圖象意義已深埋心中, 建議教學等值分數時, 應透過各式表徵表達等值的意涵, 而不建議由算則去推演。
- (3) 有近四分之一的學生能明白 $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ 卻無法正確說明理由, 也有學生把「分數乘以整數」與擴分混淆, 這些都顯示其分數整數倍計算與等值分數概念有所混淆所致, 建議教學教學時, 應多鼓勵學生發表或由教師多提問, 如將「 $\frac{2}{3} \times 2$ 」與「 $2 \times \frac{2}{3} \times 2$ 」併列於黑板, 讓學生討論其各自所表徵的分數意義, 以深度釐清基本概念。



三、小數

(一) 用圖示表徵純小數乘法的意義

1. 檢測年度：99 年度

2. 題目：「請你使用畫圖的方式說明「 0.2×6 」的答案是多少？(只計算而沒有畫圖說明不予給分)」

3. 評量目的：

本試題主要評量學生是否能理解「 0.2×6 」所代表的意義是 0.2 的 6 倍，也就是 0.2 累加 6 次；而小數其實是整數十進位構造的延伸，因此 5 個 0.2 合起來是 1，再加一個 0.2，所以答案是 1.2。

4. 評閱標準：

評閱標準 2 分有 2 類、0 分有 3 類，相關評閱標準與舉隅如下表：

表 2-3-1 99 年度數學學力檢測建構反應題第二題評閱標準

類別	評閱標準 (評閱舉隅)
2-A	標出 6 個 0.2，有 1 的表徵，可看出 5 個 0.2 合成 1。
2-B	只標出 6 個 0.2，但未能看出 5 個 0.2 合成 1。
0-A	空白
0-B	答案正確，無圖示或圖示錯誤(本題要求圖示)。
0-X	其他

5. 評閱結果：

(1) 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-3-2 99 年度數學學力檢測建構反應題第二題評閱結果統計表

得分 類型	0			2		合計
	0A	0B	0X	2A	2B	
人數	5	82	19	73	116	295
百分比(%)	1.69	27.80	6.44	24.75	39.32	
人數	106			189		
百分比(%)	35.93			64.07		

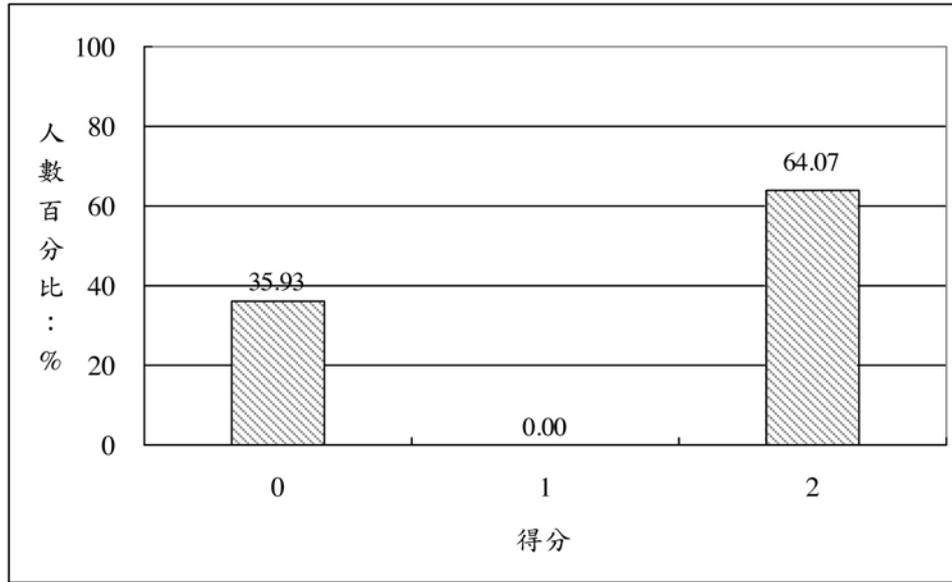


圖 2-3-1 99 年度數學學力檢測建構反應題第二題得分統計圖

由表 2-3-2 可以得知，本試題經評閱後得 2 分情形者有 189 人，占總人數的 64.07%，整體的答對率為六成四。這些得到 2 分的答題類型又分二種：第一種是標出 6 個 0.2，有 1 的表徵，可看出 5 個 0.2 合成 1，得出正確答案，有 73 人，占總人數的 24.75%；第二種只標出 6 個 0.2，但未能看出 5 個 0.2 合成 1，得出正確答案，有 116 人，占總人數的 39.32%。

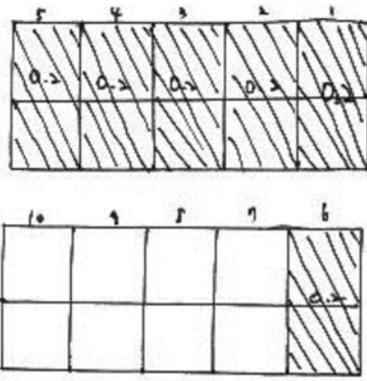
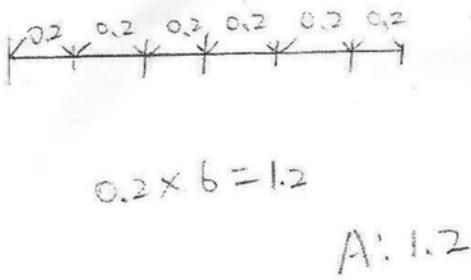
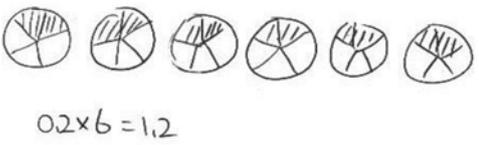
評閱得到 0 分的有 106 人，占總人數的 35.93%。這些得到 0 分的答題類型可分為三種：第一種是答題空白，有 5 人，占總人數的 1.69%；第二種是答案正確，無圖示或圖示錯誤(本題要求圖示)，此種類型的學生有 82 人，占總人數的 27.80%；第三種是胡亂作答，此種類型的學生有 19 人，占總人數的 6.44%。

(2) 答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-3-3 99 年度數學學力檢測建構反應題第二題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A		利用數線，清楚的標示「0.2×6」是 0.2 累加 6 次且 5 個 0.2 是 1，所以 0.2×6=1.2



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	 <p style="text-align: right;">A: 1.2</p>	<p>知道 0.2 用分數表示是 $\frac{2}{10}$，</p> <p>「0.2×6」是有 6 個 $\frac{2}{10}$ 且 5</p> <p>個 $\frac{2}{10}=1$，所以 $0.2 \times 6 = 1 \frac{2}{10}$</p> <p>=1.2</p>
2	2-B	 <p style="text-align: center;">A: 1.2</p>	<p>只標出 6 個 0.2，但未能看出 5 個 0.2 合成 1</p>
2	2-B	<p>一箱糖果 約 0.2 公斤 王老板買了 6 箱，共是多少公斤</p> <p>糖 糖 糖</p> <p>糖 糖 糖</p> <p>$0.2 \times 6 = 1.2$</p> <p style="text-align: center;">A: 1.2 kg</p>	<p>知道「0.2×6」是有 6 個 0.2，但是未能表示出 5 個 0.2 合起來是 1</p>
0	0-B	 <p style="text-align: center;">答: 1.2</p>	<p>學生誤將 0.2 表示成 $\frac{2}{5}$</p>

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-B		<p>學生算式正確，但圖示表徵錯誤，誤認為0.2是$\frac{1}{2}$</p>
0	0-X		<p>不理解「0.2×6」是0.2的6倍，也就是有6個0.2</p>

從學生在本題的答題情形來看，約有三成五的學生利用直式計算解決「 0.2×6 」的問題算出答案，但卻無法說明正確表徵「 0.2×6 」的意思是0.2的6倍，也就是0.2要累加6次，及5個0.2合起來是1，所以答案是1.2。

6. 教學建議：

小數的記數系統其實是整數記數系統的延伸，因此在進行小數教學時，應如同整數的教學，開始時讓學童能透過以操作具體物(小白積木、數棒)，進行單位小數的點數活動，與多單位小數的合成與分解，並以具體表徵的形式(如數線圖，分數板)進行位值間化聚的教學，理解小數的十進位構造。



(二) 小數的加法計算

1. 檢測年度：100 年度

2. 題目：

小蘭做「 $15.12+0.1$ 」的數學題目，算出來的答案是「15.13」。想一想，小蘭的答案正確嗎？為什麼？請把理由寫出來。

3. 評量目的：

本試題主要在評量學生是否能解決二位小數加法的問題，利用直式記錄解題過程與結果；並能理解小數的直式紀錄是利用位值概念對齊數字的位置。

4. 評閱標準：

評閱標準 2 分有 4 類、1 分有 1 類、0 分有 3 類，相關評閱標準與舉隅如下表：

表 2-3-4 100 年度數學學力檢測建構反應題第 3-1 題評閱標準

類別	評閱標準 (評閱舉隅)
2A	能指出小蘭的答案「不正確」，能以小數的位值概念說明理由
2B	能指出小蘭的答案「不正確」，以小數點未對齊說明理由
2C	能指出小蘭的答案「不正確」，以驗算方式 (例：) $15.13-0.1=15.03$ 檢驗答案不正確來說明理由
2D	能指出小蘭的答案「不正確」，並能說明
1A	能指出小蘭的答案「不正確」，說明理由不清楚或不對
0A	空白
0B	指出小蘭的答案「正確」，與整數的加減法混淆，以為末 (個) 位要對齊後再計算，答 15.13
0X	其他

5. 評閱結果：

(1) 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-3-5 100 年度數學學力檢測建構反應題第 3-1 題評閱結果統計表

得分類型	0			1	2				合計
	0A	0B	0X	1A	2A	2B	2C	2D	
人數	1	15	5	13	45	158	7	49	293
百分比(%)	0.34	5.12	1.71	4.44	15.36	53.92	2.39	16.72	
人數	21			13	259				
百分比(%)	7.17			4.44	88.4				

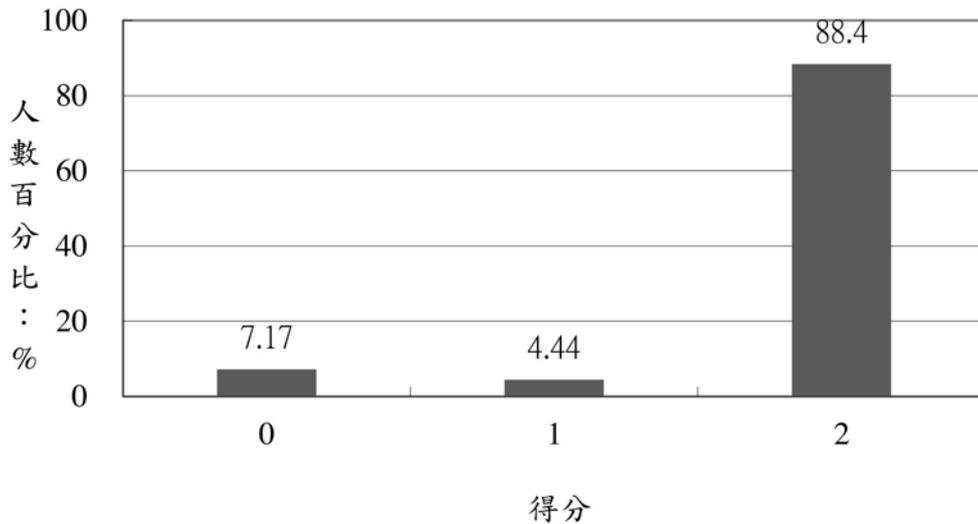


圖 2-3-2 100 年度數學學力檢測建構反應題第 3-1 題得分統計圖

由表 2-3-5 可以得知，本試題經評閱後得 2 分的有 259 人，占總人數的 88.4%，整體的答對率約為八成八。這些得到 2 分的答題類型又分為四種：第一種是能以小數的位值概念說明，這種類型的學生有 45 人，占總人數的 15.36%；第二種是以小數點未對齊的理由說明，這種類型的學生有 158 人，占總人數的 53.92%；第三種是以驗算方式（例： $15.13-0.1=15.03$ ）檢驗答案不正確來說明，這種類型的學生有 7 人，占總人數的 2.39%；第四種是以重新正確計算出正確答案說明，這種類型的學生有 49 人，占總人數的 16.72%。

得到 1 分的有 13 人，占總人數的 4.44%。

得到 0 分的有 21 人，占總人數的 7.17%。得到 0 分的答題類型又可分為三種：第一種是空白未作答，這種類型的學生有 1 人，占總人數的 0.34%；第二種是以為小數與整數的計算方式相同，這種類型的學生有 15 人，占總人數的 5.12%；第三種是胡亂作答，有 5 人，占總人數的 1.71%。

(2) 答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-3-6 100 年度數學學力檢測建構反應題第 3-1 題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	A=不正確，因為小數的加法是十分位加十分位，百分位加百分位。	能利用小數的位值概念說明答案錯誤。
2	2-A	不正確，因為 1512 個 0.01 加上 10 個 0.1，應是等於 1522 個 0.01，就是 15.22	利用單位小數的點數與化聚說明。



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-B	$15.12 + 0.1 = 15.22$ $\begin{array}{r} 15.12 \\ + 0.1 \\ \hline 15.22 \end{array}$ 答：① 錯 ② 因為小數點必須對小數點，如果對 答案 15.13 就要寫 15.12 + 0.01 才會等於 $15.13。$	知道小數加法直式計算，要將小數點對齊，卻未說明需要對齊的理由。
2	2-C	$15.12 + 0.1 = 15.22$ $15.13 - 15.12 = 0.01$ A: 不正確，因為 15.12 要加 0.01 才等於 15.13，加 0.1 會等於 15.22	以驗算方式檢驗答案不正確來說明
2	2-D	A: ① 不正確。 ② 因為小蘭算成「15.12 + 0.01」。	能說明小蘭答案不正確的原因
1	1-A	$\begin{array}{r} 15.12 \\ + 0.1 \\ \hline 15.13 \end{array}$ A: ① 錯 ② ③ 小數點故錯	理由說明不清楚
0	0-B	$\begin{array}{r} 15.12 \\ + 0.1 \\ \hline 15.22 \end{array} \quad \text{X}$ $\begin{array}{r} 15.12 \\ + 0.1 \\ \hline 15.13 \end{array} \quad \text{O}$ A: 小數可以不用對起小數，是數字對數字！	與整數的直式加減計算混淆，認為是先將最後一個數對齊後再計算。
0	0-B	$15.12 + 0.1 = 15.13$ 正確 因為她的加法沒有錯，小數點的地方也對，所以她算出的是正確的。 $\begin{array}{r} 15.12 \\ + 0.1 \\ \hline 15.13 \end{array}$	與整數的直式加減計算混淆，認為是先將最後一個數對齊後再計算。
0	0-X	$\begin{array}{r} 51.12 \\ + 0.1 \\ \hline 51.13 \end{array}$ $\begin{array}{r} 51.13 \\ + 51.13 \\ \hline 101.16 \end{array}$ A = 101.16	對題意不理解，以為題目是先計算「15.12+0.1」後，再加 15.13。計算時將 15.12 誤寫為 51.12，又誤以為小數計算是先將最後一個數對齊後再計算。

從學生在本題的答題情形來看，本題雖然有 88.4% 的學生答對，但其中只有 15.36% 的學生能用小數的位值概念解釋，多數的學生是以小數點未對齊的理由，或是重新計算的方式來說明，顯示學生以直式做小數加減計算時，只記得程序上要將小數點對齊，卻未透過概念說明的意義；在答錯的學生中，有 5.12% 將小數與整數的直式加減計算混淆，認為都是先將最後一個數對齊後再計算，顯示學生只是記得直式加減計算的規則，對於位值的概念卻不清楚；另外有 1.71% 的學生則是混淆小數加減計算，與小數乘法的直式計算程序，以為在計算小數加減時，答案的小數位數和小數 \times 小數一樣，都是，兩個小數位數的和，因此認為正確的答案是 1.522，而不是 15.13。

6. 教學建議

雖然小數的記數系統是整數記數系統的延伸，但是因為記數的單位不同，因此在進行小數加減問題教學前，學童要能先在定位板上，透過具體物操作（百格板，數棒、小白積木），進行單位小數的化聚（10 個 0.1 等於 1；10 個 0.01 等於一個 0.1），認識小數位值與意義，理解小數是多個單位合成的結果（0.35 是 3 個 0.1 和 5 個 0.01 合起來），並期望學生能使用多個單位加減運算策略（幾個 0.01 加/減幾個 0.01；幾個 0.1 加/減幾個 0.1）來進行解題，當學童能掌握小數的位值概念及十進位結構後，再利用定位板，以直式記錄小數加減的解題過程與結果；當脫離定位板後，學生的直式記錄格式應該是利用位值概念對齊數字的位置，明白小數點「 $.$ 」是整數部分與小數部分的分界，而非只死背計算的程序。

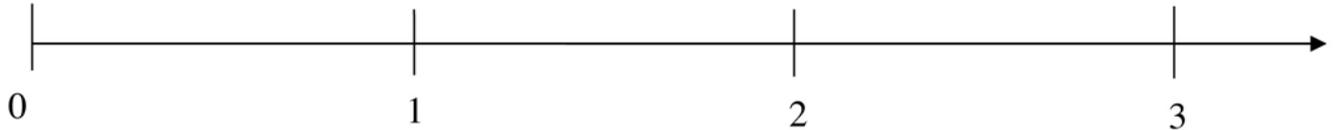


(三) 將小數正確標記在數線上

1. 檢測年度：101 年度

2. 題目：

3-1：在下面的數線上正確標示出 A 點，使 A 點在 0.7 的位置。你是怎麼標出 A 點的位置呢？把你的想法或做法寫下來。



3. 評量目的：

本試題主要在評量學生是否明白小數數線的意義，能否在 0 與 1 之間等分十分取第七分為 0.7。

4. 評閱標準：

評閱標準 2 分有 2 類、1 分有 3 類、0 分有 3 類，相關評閱標準與舉隅如下表：

表 2-3-7 101 年度數學學力檢測建構反應題第 3-1 題評閱標準

類別	評閱標準 (評閱舉隅)
2A	把數線上的單位 1 平分成 10 份，並正確標示 0.7 的位置，且清楚說明想法
2B	正確標示 0.7 的位置 (未把數線上的單位 1 平分成 10 份)，並清楚說明想法
1A	正確標示 0.7 的位置，但未做說明或說明不清楚
1B	說明清楚，但未精確標示 0.7 的位置
1C	以約估方式標示 0.7 的位置並說明想法
0B	以 0.7 公分做為 0.7 的位置
0A	空白
0X	其他

5. 評閱結果：

(1) 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-3-8 101 年度數學學力檢測建構反應題第 3-1 題評閱結果統計表

得分類型	0			1			2		合計
	0A	0B	0X	1A	1B	1C	2A	2B	
人數	9	16	63	78	11	10	69	41	297
百分比(%)	3.03	5.39	21.21	26.26	3.70	3.37	23.23	13.80	
人數	88			99			110		
百分比(%)	29.63			33.33			37.04		

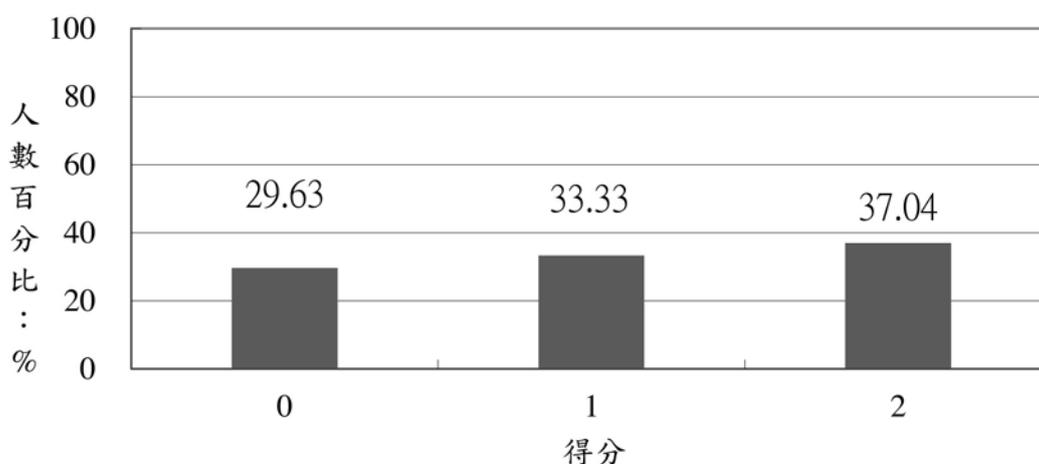


圖 2-3-3 101 年度數學學力檢測建構反應題第 3-1 題得分統計圖

由表 2-3-8 可以得知，本試題經評閱後得 2 分情形者有 110 人，占總人數的 37.04%，答對率為四成七。得到 2 分的答題類型又分為二種：第一種是把數線上的單位 1 平分成 10 份，正確標示出 0.7 的位置，且能清楚說明想法，而得到正確答案，此種類型的學生有 69 人，占總人數的 23.23%；第二種是未把數線上的單位 1 平分成 10 份，但正確標示出 0.7 的位置，並清楚說明想法，而得到正確答案，此種類型的學生有 41 人，占總人數的 13.8%。

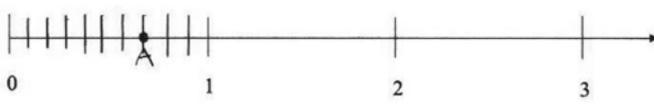
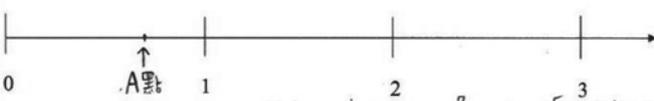
評閱得到 1 分的有 99 人，占總人數的 33.33%。得到 1 分的答題類型又分為三種：第一種是能正確標示 0.7 的位置，卻無法說明清楚(或未說明)，此種類型的學生有 78 人，占總人數的 26.26%；第二種是說明清楚了，但卻未精確標示 0.7 的位置，此種類型的學生有 11 人，占總人數的 3.7%；第三種是以約估方式標示 0.7 的位置並說明想法，此種類型的學生有 10 人，占總人數的 3.37%。

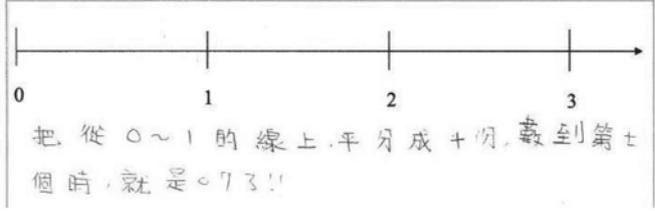
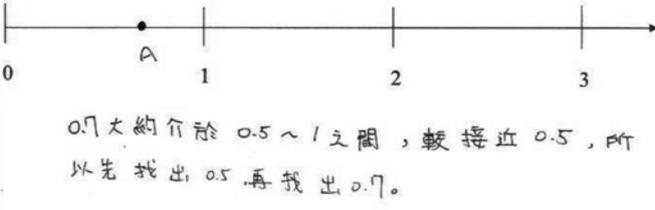
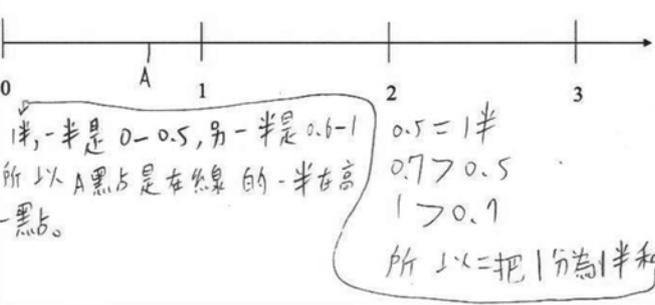
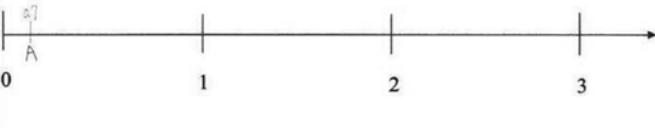
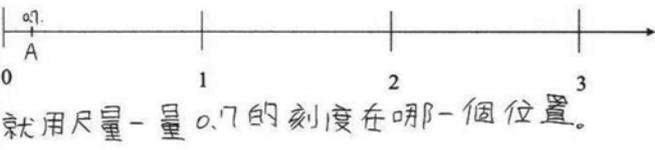
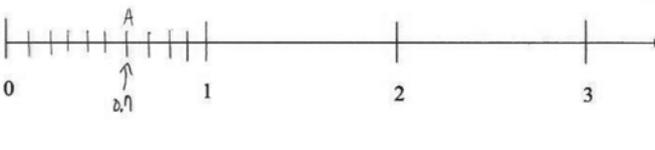
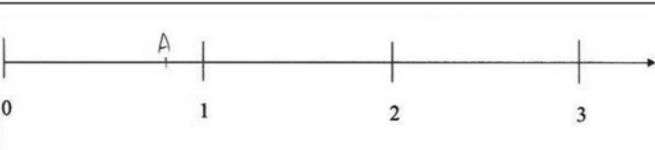
得到 0 分的有 88 人，占總人數的 29.63%。得到 0 分的答題類型又分為三種：第一種是該題的答案卷空白，此種類型的學生有 9 人，占總人數的 3.03%；第二種是以 0.7 公分做為 0.7 的位置，此種類型的學生有 16 人，占總人數的 5.39%；第三種是其他錯誤類型，此種類型的學生有 63 人，占總人數的 21.21%。



(2) 答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-3-9 101 年度數學學力檢測建構反應題第 3-1 題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	 <p>把1大格分成10小格，每一小格是0.1，7小格就是0.7。</p>	能把數線上的單位1平分成10份，並正確標示出0.7的位置，且清楚說明做法。
2	2-A	 <p>0~1是5.3cm, 53mm, 所以, 把53mm等份等於5.3mm, 1等份5.3mm。</p>	能實際量出單位1的長度並平分成10份, 且正確標示出0.7的位置, 也清楚說明其做法。
2	2-B	 <p>「0.1」中也可以分成10小格, $0.7 = \frac{7}{10}$, 而且「0.1」的距離是5.3公分, 5.3先除以10求出每一小格是0.53公分, 再用 $0.53 \times 7 = 3.71$, 所以3.71公分就是「0.1」中的 $\frac{7}{10}$ (0.7)。</p>	雖然未在數線上把單位1平分成10份, 但從其說明中, 可以知道該生概念非常清楚, 他是先實測單位1的長度, 再算出0.7的長度, 直接正確的標示出0.7的位置。
2	2-B	 <p>0~1大約為5cm3mm, 除以10等於5.3mm, 0.7大約在37.1mm的點上。</p>	雖然未把單位1平分成10份, 他是先實測單位1的長度, 再算出0.7的長度, 且清楚說明想法。文字敘述中雖出現「大約」的說法, 但仍精準標示出0.7。
1	1-A	 <p>A: 因為在0到1之間有9個0.1, 所以把9個0.1都寫下來, 到第七個就是0.7</p>	雖正確標示0.7的位置, 但卻說明0與1之間有9個0.1, 疑似「刻度」與「間隔」混淆不清。
1	1-A		雖正確標示0.7的位置, 但未做任何文字說明。
1	1-B	 <p>A: 因為此圖一格為5.3, 將5.3:10=0.53, 再四捨五入即可</p>	文字能說明清楚, 但未能精確標示0.7的位置。

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
1	1-B	 <p>把從0~1的線上,平分成10份,數到第七個時,就是0.7了!!</p>	說明清楚,但未標示出0.7的位置。
1	1-C	 <p>0.7大約介於0.5~1之間,較接近0.5,所以先找出0.5,再找出0.7。</p>	能以約估方式標示0.7大約的位置,並說明想法。
1	1-C	 <p>一半,一半是0-0.5,另一半是0.5-1 所以A點是在總的一半右一點。</p> <p>0.5 = 1半 0.7 > 0.5 1 > 0.1 所以 = 把1分為1半和</p>	能以約估方式標示0.7大約的位置,並說明想法。
0	0-B		誤以為0.7就是0.7公分,此類型的孩子對於小數的概念仍不清楚。
0	0-B	 <p>就用尺量-量0.7的刻度在哪一個位置。</p>	誤以為0.7就是0.7公分,此類型的孩子對於小數的概念仍不清楚。
0	0-X		A點是0.6。可能數錯刻度或由刻度0開始點數,取第7個刻度。
0	0-X	 <p>因為1-0.7=0.3,所以我以1為基準,扣掉0.3就是A點了。</p>	以算式說明 $1-0.7=0.3$,意圖由刻度1減「0.3個單位」後即為A點,但未能正確找到「0.3個單位」長。

從學生在本題的答題情形來看,僅有37%左右的六年級學生,能正確標示及說明數線0.7的位置;有近30%的學生,只能標示或正確說明0.7的位置;也有近30%的學生均無法標示或說明清楚如何在給定的刻度0和1之間取0.7的位置。顯示學生在以文字說明或將小數表徵在數線上的概念,仍有待加強;而在小數數線的學習上,則仍有刻度與間距、相對單位(0.7個單位長)與普遍單位(0.7公分)混淆等迷思概念。



(四) 在圖形上表徵小數

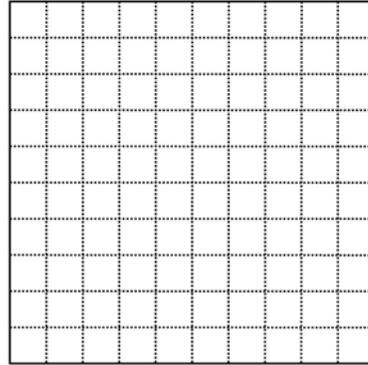
1. 檢測年度：102 年度

2. 題目：

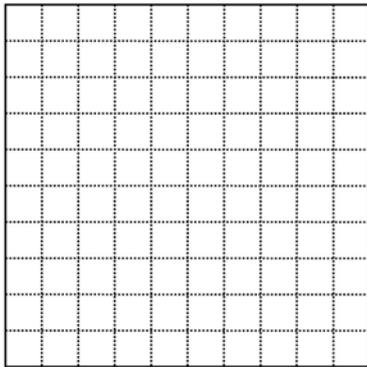
右圖表示一張百格板，

請你在下圖中用塗色或畫斜線的方式，

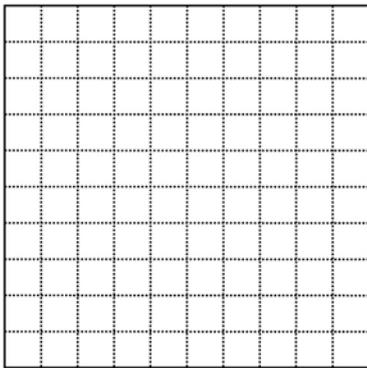
分別畫出 0.6 張和 0.24 張百格板。



(1) 0.6 張



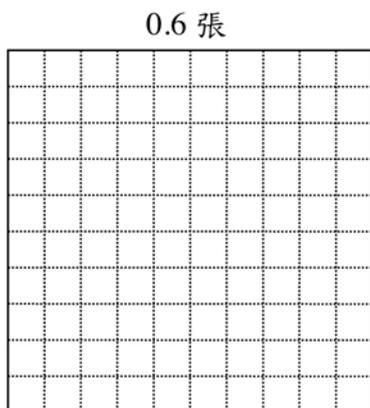
(2) 0.24 張



3. 評量目的：

本試題主要在評量學生是否能理解小數的意義，並在圖形上表徵出來。

題目 1-1：畫出 0.6 張百格板。



1.評閱標準：

評閱標準 2 分有 2 類、1 分有 3 類、0 分有 3 類，相關評閱標準與舉隅如下表：

表 2-3-10 102 年度數學學力檢測建構反應題第 1-1 題評閱標準

類別	評閱標準 (評閱舉隅)
2A	畫出 6 列或 6 行(60 小格)表示 0.6 張。
2B	畫出 60 小格表示 0.6 張(非 2A 的畫法)。
2C	畫出 60 小格沒有塗色。
0A	空白。
0B	畫出 6 小格表示 0.6 張。
0C	0.6 張表示成 36 小格。
0X	其他。

2.評閱結果：

(1)評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-3-11 102 年度數學學力檢測建構反應題第 1-1 題評閱結果統計表

得分 類型	0				2			合計
	0A	0B	0C	0X	2A	2B	2C	
人數	18	282	6	81	251	3	6	647
百分比 (%)	2.78	43.59	0.93	12.52	38.79	0.46	0.93	
人數	387				260			
百分比 (%)	59.81				40.19			

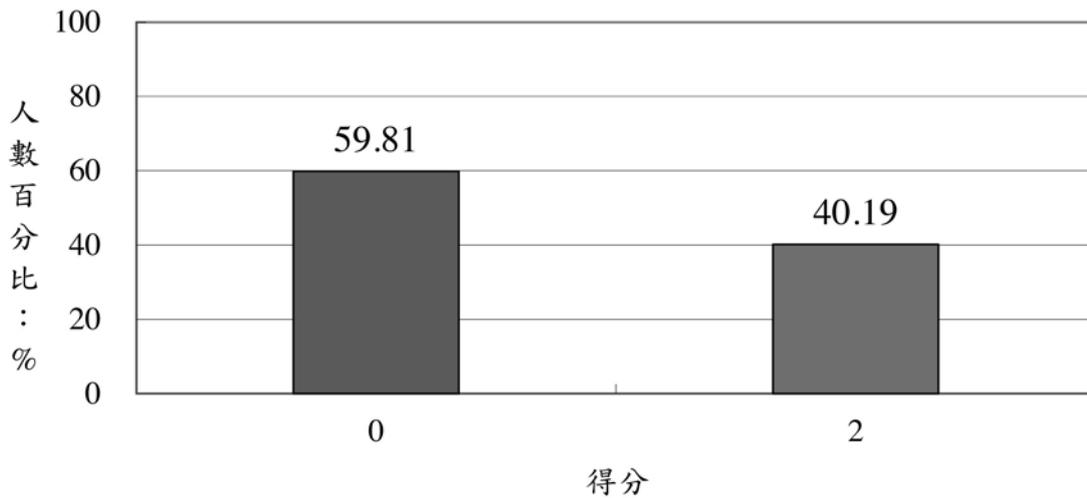


圖 2-3-4 102 年度數學學力檢測建構反應題第 1-1 題得分統計圖

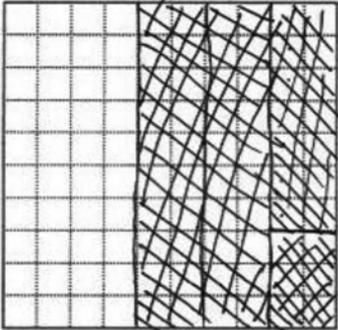
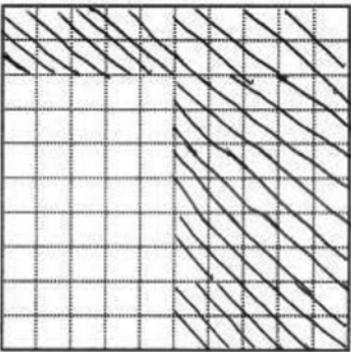
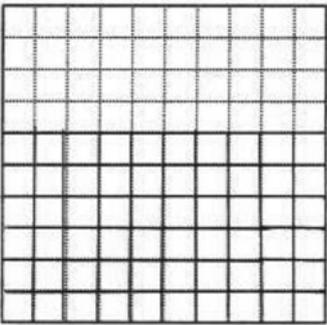
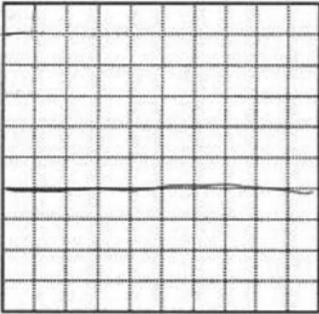
由表 2-3-11 可以得知，本試題經評閱後得 2 分情形者有 260 人，占總人數的 40.19%。這些得到 2 分的答題類型又分三種：第一種是畫出 6 列或 6 行(60 小格)表示 0.6 張，得出正確答案，有 251 人，占總人數的 38.79%；第二種是畫出 60 小格表示 0.6 張，得出正確答案，有 3 人，占總人數的 0.46%，第三種是畫出 60 小格沒有塗色，得出正確答案，有 6 人，占總人數的 0.93%。

得到 0 分的有 387 人，占總人數的 59.81%。得到 0 分的作答類型可分為四種：第一種是答題空白，有 18 人是這種情形，占總人數的 2.78%；第二種是畫出 6 小格表示 0.6 張，有 282 人，占總人數的 43.59%，第三種是 0.6 張表示成 36 小格，有 6 人，占總人數的 0.93%，第四種是其他，有 81 人，占總人數的 12.52%。

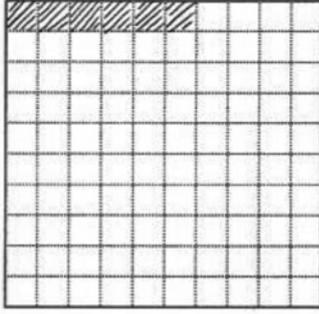
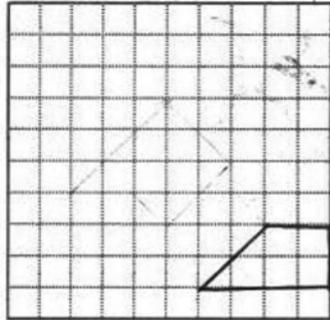
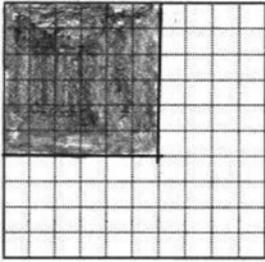
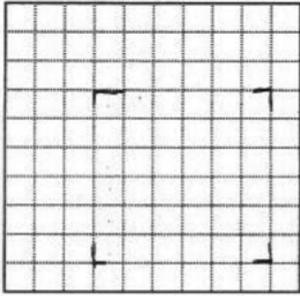
(2)答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

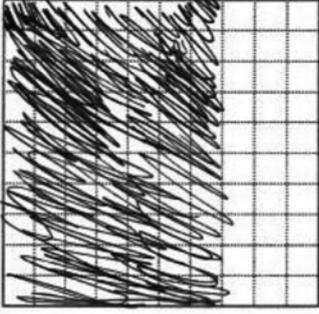
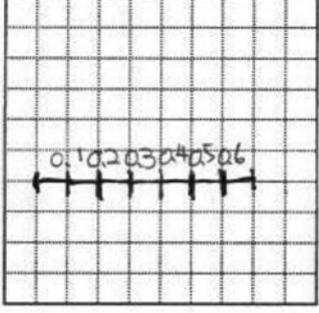
表 2-3-12 102 年度數學學力檢測建構反應題第 1-1 題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	<p>(1) 0.6 張</p>	<p>知道 1 格是 0.01 張板百格板，畫 60 小格，也就是 0.6 張；或者知道 1 列是 0.1 張百格板，畫 6 列表示 0.6 張。</p>

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	<p>(1) 0.6 張</p> 	<p>知道 1 格是 0.01 張板百格板，畫 60 小格 0.6 張；或者知道 1 列是 0.1 張百格板，畫 6 列表示 0.6 張。</p>
2	2-B	<p>(1) 0.6 張</p> 	<p>知道 1 格是 0.01 張板百格板，畫 60 小格 0.6 張</p>
2	2-C	<p>(1) 0.6 張</p> 	<p>知道 1 格是 0.01 張板百格板，畫 60 小格表示有 60 個 0.01，也就 0.6 張；或者知道 1 列是 0.1 張百格板，畫 6 列表示 0.6 張。只是沒有將 0.6 張百格板畫上斜線或用塗色表示。</p>
2	2-C	<p>(1) 0.6 張</p> 	<p>知道 1 格是 0.01 張板百格板，畫 60 小格表示有 60 個 0.01，也就 0.6 張；或者知道 1 列是 0.1 張百格板，畫 6 列表示 0.6 張。只是沒有將 0.6 張百格板畫上斜線或用塗色表示。</p>



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-B	<p>(1) 0.6 張</p> 	<p>以為 1 格是 0.1 張百格板，所以 0.6 張板百格板，就畫成 6 小格。</p>
0	0-B	<p>(1) 0.6 張</p> 	<p>以為 1 格是 0.1 張百格板，0.6 張板百格板就是 6 小格，所以畫成完整的 4 小格和 2 個半格，合起來是 6 格。</p>
0	0-C	<p>(1) 0.6 張</p> 	<p>以為 0.6 張百格板就是百格板的長 10 格中的 6 格，寬也是 10 格中的 6 格，所以畫出 36 小格</p>
0	0-C	<p>(1) 0.6 張</p> 	<p>以為 0.6 張百格板就是 $6 \times 6 = 36$ 小格</p>

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-X	<p>(1) 0.6 張</p> 	畫成 7 行，也就是 0.7 張
0	0-X	<p>(1) 0.6 張</p> 	不懂題意，畫成數線，在數線上從 0.1 標到 0.6，以為是 0.6 張，沒有 1 等分成 10 份的概念。

從學生在本題的答題情形來看，約6成學生無法正確以圖示表徵小數的意義，其中又以畫出6小格表徵0.6張百格板居多，這也是學生學習小數很常見的錯誤類型之一。學生可能只知道記數符號，但卻不了解數學符號的意義。例如學童可能會念0.6，知道0是個位、6是十分位，但卻不能理解0.6所代表的意義是介於0與1之間，所以對於0.6這個數缺乏「量感」。在此，學生不理解一張百格板（整體量1）等分10分後，一等份就是一行（列），也就是0.1張，0.6張表示6等份（部份量），也就是要畫出6行或6列，而非6小格；或者學生只看到十分位的6，便以為0.6張就是6格，卻忽略了此時的1是一張等分成100份的百格板，一等份就是一小格，也就是0.01張，所以0.6張是60個0.01，也就是畫出60格。

(3)教學建議

從以上學生答題錯誤類型發現，小數的概念抽象不易理解，小數教學的重點不在運算規則上，教師初始進行小數概念教學時，要特別強調抽象的小數符號與具體物的連結，以及與分數「部分與整體」連結，讓小數的學習是有感覺的。因此我們提出以下的建議：

①「學生會將百格板 100 等分之後的小格視為 0.1，6 格就是 0.6 張百格板」的迷思概念，可以透過舉例「在百格板上塗滿 6 條也是 0.6 張百格板，到底哪一個才是 0.6 張百格板？」製造認知衝突，並問「百格板是被等分成幾份？在 100 份中的每一等份是多少？」

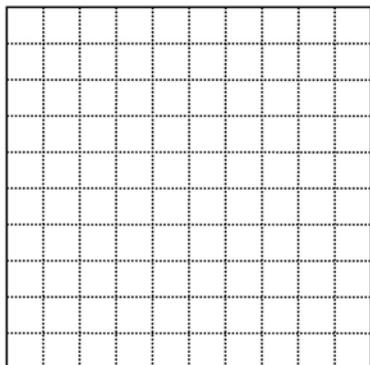


用分數表示是?用小數表示是?」進而澄清「百格板 100 等分之後的小格為 0.01，60 格才是 0.6 張」的概念。

- ②在引入純小數概念時，教師可提供學生不同的具體情境，透過學生已熟悉的表徵（如具體物、圖像、分數符號等），來幫助學生連結小數符號並賦予其意義。如連續量的情境：線段、披薩和杯水等；以及離散量的情境：一包糖果、一條串珠等。教師在呈現這些圖形時，一定要讓學生「明確數出十等分」，不斷強調 $0.1=1/10$ ，單位量要被等分成 10 份。
- ③此外，教師在呈現圖片或具體物時，應提供十個大單位且每個大單位內含十個小單位的情境，例如，一次提供學生十串彩珠(每串皆有 10 顆彩珠)，當要求學生畫出 0.3 串時，可刺激學生思考整體 1 在哪裡？到底要標示出 3 串彩珠還是 3 顆彩珠？

題目 1-2：畫出 0.24 張百格板。

0.24 張



1. 評閱標準：

評閱標準 2 分有 2 類、1 分有 3 類、0 分有 3 類，相關評閱標準與舉隅如下表：

表 2-3-13 102 年度數學學力檢測建構反應題第 1-2 題評閱標準

類別	評閱標準 (評閱舉隅)
2A	畫出 2 列又 4 小格或 2 行又 4 小格表示 0.24 張。
2B	畫出 24 小格表示 0.24 張(非 2A 的畫法)。
2C	畫出 24 小格沒有塗色。
0A	空白。
0B	畫出 25 小格表示 0.24 張。
0X	其他。

2. 評閱結果：

(1) 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-3-14 102 年度數學學力檢測建構反應題第 1-2 題評閱結果統計表

得分 類型	0			2			合計
	0A	0B	0X	2A	2B	2C	
人數	20	20	103	392	100	12	647
百分比 (%)	3.09	3.09	15.92	60.59	15.46	1.85	
人數	143			504			
百分比 (%)	22.10			77.90			

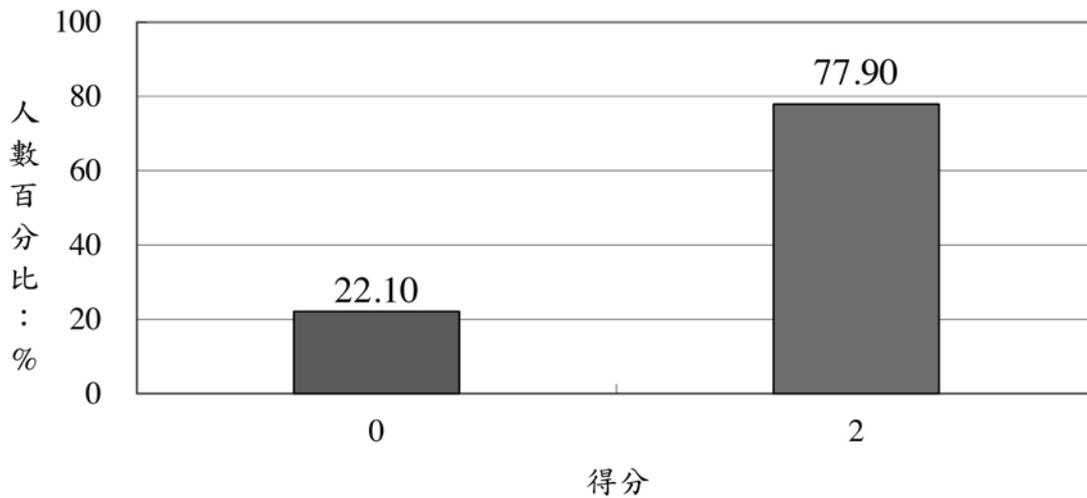


圖 2-3-5 102 年度數學學力檢測建構反應題第 1-2 題得分統計圖

由表 2-3-14 可以得知，本試題經評閱後得 2 分情形者有 504 人，占總人數的 77.9%。這些得到 2 分的答題類型又分三種：第一種是畫出 2 列又 4 小格或 2 行又 4 小格表示 0.24 張，得出正確答案，有 392 人，占總人數的 60.59%；第二種是畫出 24 小格表示 0.24 張，得出正確答案，有 100 人，占總人數的 15.46%，第三種是畫出 24 小格沒有塗色，得出正確答案，有 12 人，占總人數的 1.85%。

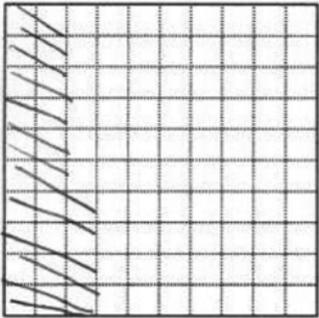
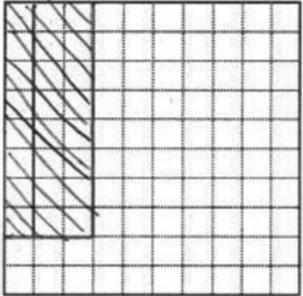
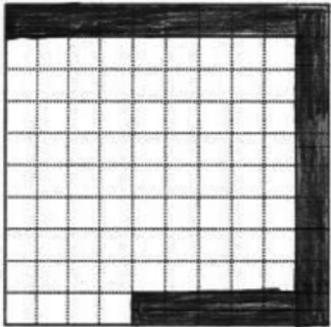
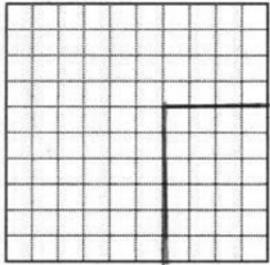
得到 0 分的有 143 人，占總人數的 22.1%。得到 0 分的作答類型可分為三種：第一種是答題空白，有 20 人是這種情形，占總人數的 3.09%；第二種是畫出 25 小格表示 0.24 張，有 20 人，占總人數的 3.09%，第三種是其他，有 103 人，占總人數的 15.92%。

(2) 答題類型分析

從學生的答題類型可以了解學生解題的思維及其建構歷程，更可以發現學生常見的問題。在第一題中學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表：

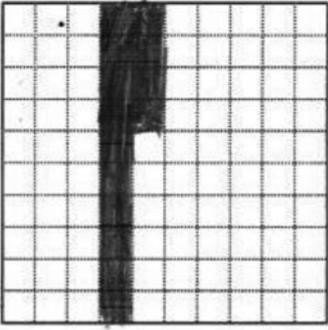
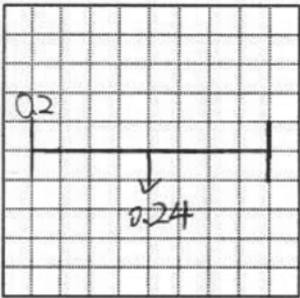
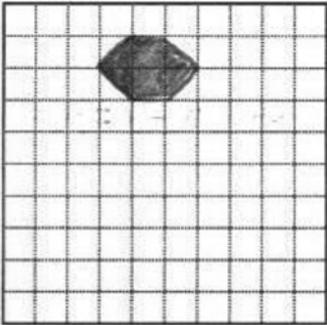
表 2-3-15 102 年度數學學力檢測建構反應題第 1-2 題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	<p>(2) 0.24 張</p>	<p>知道 1 格是 0.01 張百格板，畫 24 小格表示 0.24 張；或者知道 1 列是 0.1 張百格板，1 格是 0.01 張板百格板，畫 2 列又 4 格表示 0.24 張。</p>

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	<p>(2) 0.24 張</p> 	<p>知道 1 格是 0.01 張板百格板，畫 24 小格表示 0.24 張；或者知道 1 行是 0.1 張百格板，1 格是 0.01 張板百格板，畫 2 行又 4 格表示 0.24 張。</p>
2	2-B	<p>(2) 0.24 張</p> 	<p>知道 1 格是 0.01 張板百格板，畫 24 小格表示 0.24 張。</p>
2	2-B	<p>(2) 0.24 張</p> 	<p>知道 1 格是 0.01 張板百格板，畫 24 小格表示有 24 個 0.01，也就是 0.24 張。</p>
2	2-C	<p>(2) 0.24 張</p> 	<p>知道 1 格是 0.01 張板百格板，畫 24 小格表示有 24 個 0.01，也就是 0.24 張。 只是沒有將 0.24 張百格板畫上斜線或用塗色表示。</p>



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-C	<p>(2) 0.24 張</p>	<p>知道 1 格是 0.01 張板百格板，畫 24 小格表示有 24 個 0.01，也就是 0.24 張。</p> <p>只是沒有將 0.24 張百格板畫上斜線或用塗色表示。</p>
2	2-C	<p>(2) 0.24 張</p>	<p>知道 1 格是 0.01 張板百格板，畫 24 小格表示 0.24 張；或者知道 1 行是 0.1 張百格板，1 格是 0.01 張板百格板，畫 2 行又 4 格表示 0.24 張。</p> <p>只是沒有 0.24 張百格板畫上斜線或用塗色表示。</p>
0	0-B	<p>(2) 0.24 張</p>	<p>把 0.24 張百格板畫成 2 行又 5 格共 25 小格，也就是 0.25 張。</p>
0	0-B	<p>(2) 0.24 張</p>	<p>把 0.24 張百格板畫成 $5 \times 5 = 25$ 小格，也就是 0.25 張。</p>

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-X	<p>(2) 0.24 張</p> 	<p>把 0.24 張百格板畫成 1 行又 4 小格，也就是 0.14 張。</p>
0	0-X	<p>(2) 0.24 張</p> 	<p>不懂題意，畫成數線，在數線的一端標上 0.2，另一端則為 0.3，而在 0.2 和 0.3 之間標上 0.24，以為是 0.24 張。</p>
0	0-X	<p>(2) 0.24 張</p> 	<p>以為 1 格是 0.1 張百格板，半格是 0.01 張百格板，畫了 2 小格表示 0.2 張，4 個半格表示 0.04 張，合起來也就是 0.24 張百格板。</p>

從學生在本題的答題情形來看，約 8 成學生正確以圖示表徵二位小數的意義，解題類型大致分成 3 種：第一種類型是知道百格板等分成 100 份後，1 等份(1 格)是 0.01 張板百格板，畫 24 小格表示 0.24 張；或者知道 1 行是 0.1 張百格板，1 格是 0.01 張板百格板，畫 2 行又 4 格表示 0.24 張。第二種類型是知道 1 格是 0.01 張板百格板，畫 24 小格表示 0.24 張；此種解題畫法很多樣貌，只要畫出總共 24 格，0.24 張即可；第三種類型是畫出 24 格，但未塗色或畫上斜線，因其概念正確，故仍給完整 2 分。

錯誤解題約占 2 成，主要是因為不理解二位純小數的意義，而表徵錯誤。



(3)教學建議

二位小數是記錄幾個「一」，幾個「0.1」和幾個「0.01」的合成結果。由答錯類型看來，學生因為不理解二位小數的意義而表徵錯誤。因此我們提出以下的建議：

- ①教學時可透過與分數 $\frac{1}{100}$ 的連結，讓學生瞭解單位小數0.01的意義，進而表徵其所描述的數量。在課堂上，增加做數的活動，使學童更能掌握小數的意義。例如「0.01張百格板和1個白色積木一樣大，0.1張百格板和1條橘色積木一樣大，需要幾條橘色積木和幾個白色積木一起排起來，才和0.24張百格板一樣大？」學生答案可能是24個白色積木、1條橘色積木和14個白色積木或2條橘色積木和4個白色積木等多種情形。讓學生操作具體物，並連結小數的記數符號，使二位小數的教學更有量感。
- ②二位小數是將「0.01」當作計數單位，進行合成與分解活動，如0.06是6個0.01的合成結果，0.24是2個0.1和4個0.01合成的結果。透過操作數學積木，可多進行0.1與0.01的雙向化聚活動，如0.24是記錄2個0.1和4個0.01的合成結果，0.24也是記錄24個0.01的合成結果，讓學生的二位小數的學習更意義化。

四、比率

理解折扣的意義

1. 檢測年度：101 年度

2. 題目：下表是甲、乙、丙三家超商飲料的特價情形：

超商名稱	飲料特價情形
甲	每買 3 瓶送 1 瓶
乙	每一瓶都打八折
丙	每買 2 瓶，第二瓶打六折

小蘭總共買 10 瓶飲料，每瓶原價 20 元，你會建議她到哪一家超商買比較便宜呢？為什麼？把你的想法或做法寫下來。

3. 評量目的：

本試題主要在評量學生是否理解折扣的意義，解決生活中的折扣問題。

4. 評閱標準：

評閱標準 2 分有 2 類、1 分有 4 類、0 分有 5 類，相關評閱標準如下表：

表 2-4-1 101 年度數學學力檢測建構反應題第四題評閱標準

類別	評閱標準
2A	能分別算出到甲、乙、丙超商買 10 瓶的價錢都相同（160 元）
2B	到甲超商購買 10 瓶會送 3 瓶，因此以單價比較得出甲超商最便宜【特例】
1A	能正確算出乙、丙超商的價錢，但無法正確算出甲超商的價錢
1B	能正確算出甲、乙超商的價錢，誤認為丙超商是 2 瓶都打六折
1C	能正確算出甲、乙超商所付的錢，但無法算出丙超商的價錢
1D	能正確算出甲、丙超商所付的錢，但無法算出乙超商的價錢
0B	受打六折影響，認為丙超商折數低最便宜
0C	受贈送影響，認為甲超商最便宜
0D	受每一瓶都打折的影響，認為乙超商最便宜
0A	空白
0X	其他



5. 評閱結果：

(1) 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-4-2 101 年度數學學力檢測建構反應題第四題評閱結果統計表

得分 類型	0					1				2		合計
	0A	0B	0C	0D	0X	1A	1B	1C	1D	2A	2B	
人數	7	16	8	28	63	45	9	20	2	80	19	297
百分比(%)	2.36	5.39	2.69	9.43	21.21	15.15	3.03	6.73	0.67	26.94	6.40	
人數	122					76				99		
百分比(%)	41.08					25.59				33.33		

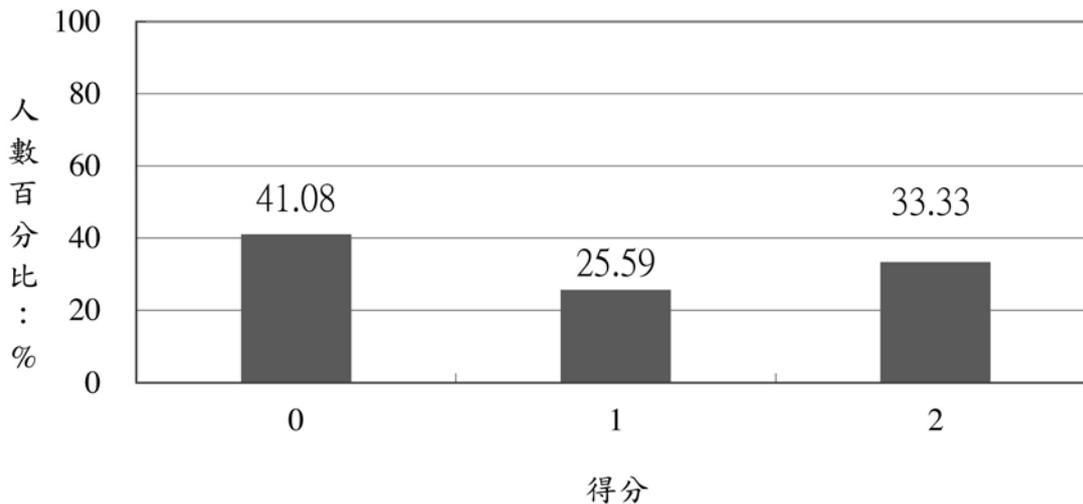


圖 2-4-1 101 年度數學學力檢測建構反應題第四題得分統計圖

由表 2-4-2 可以得知，本試題經評閱後得 2 分的有 99 人，占總人數的 33.33%，整體的答對率約為三成三。得到 2 分的答題類型又分為二種：第一種是分別算出到三家超商超商買 10 瓶飲料的價錢，得到正確答案，此種類型的學生有 80 人，占總人數的 26.94%；第二種是設想到三家超商都購買 10 瓶飲料，由於甲超商購買 10 瓶會送 3 瓶，因此以單價比較得出甲超商最便宜，此種類型的學生有 19 人，占總人數的 6.4%。

得到 1 分的有 76 人，占總人數的 25.59%。得到 1 分的答題類型又分為四種：第一種是能正確算出乙、丙超商的價錢，但無法正確算出甲超商的價錢，此種類型的學生有 45 人，占總人數的 15.15%；第二種是能正確算出甲、乙超商的價錢，誤認為丙超商是 2 瓶都打六折，此種類型的學生有 9 人，占總人數的 3.03%；第三種是能正確算出甲、乙超商所付的錢，但無法算出丙超商的價錢，此種類型的學生有 20 人，占總人數的 6.73%；第

四種是能正確算出甲、丙超商所付的錢，但無法算出乙超商的價錢，此種類型的學生有 2 人，占總人數的 0.67%。

得到 0 分的有 122 人，占總人數的 41.08%。得到 0 分的答題類型又分為五種：第一種是該題的答案卷空白，此種類型的學生有 7 人，占總人數的 2.36%；第二種是受打六折影響，認為丙超商折數低最便宜，此種類型的學生有 16 人，占總人數的 5.39%；第三種是受贈送影響，認為甲超商最便宜，此種類型的學生有 8 人，占總人數的 2.69%；第四種是受每一瓶都打折的影響，認為乙超商最便宜，此種類型的學生有 28 人，占總人數的 9.43%；第五種是無法判斷其想法，歸為其他，此種類型的學生有 63 人，占總人數的 21.21%。

(2) 答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-4-3 101 年度數學學力檢測建構反應題第四題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	<p>甲：$\frac{40}{2} = 20$ $10 - 2 = 8$ $20 \times 8 = 160$ * 裡面有 4 瓶送的，所以剩下有 8 瓶，所以 $8 \times 20 = 160$ 元</p> <p>乙：$20 \times \frac{80}{100} \times 10 = 160$ = 160 元 * 先看 1 瓶打幾折，在乘以幾瓶。</p> <p>丙：$5 \times 2 \times \frac{60}{100} + 5 \times 2 \times 10 = 100 + 100 = 200$ = 60 + 140 = 200 元 = 160 元 * 有 5 瓶打 6 折，其他 5 瓶沒折，所以算式是這樣。</p> <p>160 元 A: 3 家一樣</p>	<p>學童清楚了解折扣，把折扣換算成分數，且能用一個數學算式說明解題想法。</p>
2	2-A	<p>甲：$3 \times 20 = 60$ $3 + 1 = 4$ 4 瓶是 60 元 $4 \times 2 = 8$ $60 \times 2 = 120$ $120 + (20 \times 2) = 160$ 10 瓶是 160 元</p> <p>乙：$20 \times 10 = 200$ $200 \times \frac{80}{100} = 160$ 10 瓶是 160 元</p> <p>丙：$20 + (20 \times \frac{60}{100}) = 32$ $10 \div 2 = 5$ $32 \times 5 = 160$ 10 瓶是 160 元</p> <p>甲 = 乙 = 丙 ① 一樣便宜 ② 因為三家買 10 瓶每瓶都是 160 元</p>	<p>學童利用算出丙超商 2 瓶飲料的價錢，再算出 10 瓶飲料是丙超商組合的 5 倍，而得正確答案。</p>
2	2-A	<p>甲：$20 \times 5 = 100$ $100 \div 2 = 50$ $20 \times 5 = 100$ $100 + 60 = 160$</p> <p>乙：$20 \times 10 = 200$ = 160</p> <p>丙：$20 + 20 \times 5 = 120$ = 20 + 140 = 160</p> <p>A: 一樣多 ① 因為甲商店買了送 1，所以 10 瓶只要 60 元，18 瓶只要 100 元，但是後面只剩下兩瓶，所以就要付原價，全部加起來是 160 元，乙商店每瓶打八折，所以用全部買的数量乘以原價，就是價錢，算出來也是 160 元，丙商店買兩瓶，第二瓶打六折，所以用 $20 + 20 \times 60\%$ 就是把兩瓶合起來的價錢算好，最後因為兩瓶要買 5 次才拿到 10 瓶，所以再乘 5，就是 160 元，所以三家一樣多。</p>	<p>學童不僅能計算且能用文字清楚說明解題的想法與結果。</p>
2	2-A	<p>甲：\rightarrow 送 1 $= 10 \div 4 = 2 \dots 2$ 送 2 瓶</p> <p>乙： 打几折：省 20% $20\% \times 10 = 2$ 省 2 瓶的錢</p> <p>丙：$>$ 打六折 = 省 40% $10 \div 2 = 5$ $40\% \times 5 = 2$ 省 2 瓶的錢</p> <p>所以：都一樣</p>	<p>學童清楚明瞭折扣能節省總價的幾倍，再計算出省了幾瓶的錢，因為節省的瓶數相等而一樣便宜。</p>



得分	類型	解題類型舉隅	解題 (錯誤) 類型分析
2	2-A	<p>甲</p> $10 \times 20 = 200$ $20 \times 0.8 = 16$ $16 \times 10 = 160$ $10 \times 20 = 200$ $160 < 200$ <p>乙</p> $20 \times 10 = 200$ $200 \div 2 = 100$ $100 \times 0.6 = 60$ $20 \times 5 = 100$ $60 + 100 = 160$ $160 < 200$ <p>丙</p> $10 \div 2 = 5$ $20 \times 5 \times 0.6 = 60$ $10 - 5 = 5$ $20 \times 5 + 60 = 160$ $160 \div 10 = 16$ <p>甲=乙=丙 160=160=160 A:一樣便宜</p>	<p>學童算出三家超商的 10 瓶飲料總價，並與原先沒有優惠的情形比較，得知有優惠的販售活動比較便宜。</p>
2	2-B	<p>到甲超商買:</p> $10 \div 3 = 3 \dots 1$ $10 + 3 = 13$ $10 \times 20 = 200, 9 \times 20 = 180,$ $13 \text{ 瓶 } 200 \text{ 元, } 11 \text{ 瓶 } 180 \text{ 元}$ <p>到乙超商買</p> $200 \times 0.8 = 160, 160 \div 10 = 16$ $10 \text{ 瓶 } 160 \text{ 元, 平均一瓶 } 16 \text{ 元}$ <p>到丙超商買</p> $200 \div 13 = 15$ $180 \div 11 = 16$ $15 < 16$ <p>平均一瓶 15 元</p> <p>10 瓶 160 元, 平均一瓶 16 元</p> <p>A: 到甲超商買, 因為甲超商平均一瓶最便宜</p>	<p>學童受「買 10 瓶飲料」字句和生活習慣影響，設想到三家超商購買 10 瓶飲料，再計算出每家超商 1 瓶飲料的單價，比較結果，認為甲超商最為便宜。</p>
2	2-B	<p>甲, 因為其他兩家都便宜了 40 元, 雖然甲總需要 200 元, 可是買 3 瓶送 1 瓶, 等於小數多拿到 3 瓶, 也就便宜了 60 元。</p>	<p>學童受「買 10 瓶飲料」字句，認為甲超商因為買 10 瓶贈送 3 瓶便宜 60 元，比其他家超商便宜。</p>
2	2-B	<p>甲比較便宜, 因為價錢是 200 元, 但又送 3 瓶, 而且 $3 \times 20 = 60$, 然後 $200 - 60 = 140$, 就賺到了, 乙和丙是 160 元。</p> <p>做法:</p> <p>甲: $\frac{20}{200} \times \frac{20}{60} = \frac{200}{140}$</p> <p>乙: $\frac{20}{160} \times \frac{16}{160}$</p> <p>丙: $\frac{5}{10} \times \frac{20}{120} \times \frac{12}{160}$</p> $140 < 160 = 160$	<p>學童受「買 10 瓶飲料」字句，算出到三家購買的總價，得知甲超商最便宜。</p>
1	1-A	<p>甲 = 3 瓶 + 1 乙 = 1 瓶 $\times 80\%$ 丙 = 2 瓶 \rightarrow 第二瓶 $\times 60\%$ 1 瓶 = 20 元</p> <p>10 瓶甲: $3 \times 2 = 6$ $6 + 2 = 8$ $20 \times 3 = 60$ $20 \times 2 = 40$ $60 + 40 = 100$ 10 瓶乙: $20 \times \frac{80}{100} = 16$ (一瓶 16 元) $16 \times 10 = 160$ 10 瓶丙: $20 + (20 \times \frac{60}{100}) = 32$ (元) $32 \times 5 = 160$</p> <p>A: 到甲店 甲店 = 10 瓶 100 元 乙店 = 10 瓶 160 元 丙店 = 10 瓶 160 元</p>	<p>學童能正確計算出乙、丙超商的總價，忽略甲超商購買 3 瓶超商的價錢要計算兩次，因為僅計算 1 次而錯誤。</p>
1	1-A	$10 \div 3 = 3 \dots 1$ $20 \times 10 = 200$ $20 \times 0.8 = 16$ $16 \times 10 = 160$ $10 \div 2 = 5$ $12 \times 5 = 60$ $20 \times 5 = 100$ $100 + 60 = 160$ <p>想法同樣 160 元但甲超商多送 3 瓶變 100 元 $100 - 60 = 40$, 40 是兩瓶的價錢但甲超商送 3 瓶。</p> <p>A: 甲超商較便宜</p>	<p>因為計算出乙、丙超商的總價為 160 元，雖設想用 160 元購買飲料，但計算甲超商時，受「買 10 瓶贈送 3 瓶」影響，而無法正確算出甲超商的價錢。</p>
1	1-B	$10 \times 20 = 200$ $200 \times 0.6 = 120$ $20 \times 0.8 = 16$ $16 \times 10 = 160$ $3 + 1 = 4$ $10 \div 4 = 2 \dots 2$ $8 \times 20 = 160$ $160 = 160 > 120$ <p>A: 丙店, 因為最便宜</p>	<p>正確算出甲、乙超商的價錢，卻因誤認為丙超商「第二瓶打六折」是「每瓶都打六折」而計算錯誤。</p>

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
1	1-C	<p>甲：每付60元就有4瓶瓦，所以120元就有8瓶瓦，有兩瓶瓦還沒付錢，所以要加40元。 $120 + 40 = 160$</p> <p>乙：$20 \times \frac{20}{100} = 16$ $16 \times 10 = 160$</p> <p>丙：$20 \times 2 = 40$ $40 \times \frac{60}{100} = 24$ $100 \div 2 = 5$ $24 \times 5 = 120$</p> <p>A: 丙</p>	<p>正確算出甲、乙超商的價錢，卻因誤認為丙超商「每買2瓶，第二瓶打六折」是「每買2瓶都打六折」而計算錯誤。</p>
0	0-B	<p>丙店比較便宜：因為你買2瓶的時候1瓶不是20元嗎，但買第2瓶的時候會打六折就變成12元了便宜8元。</p> $\begin{array}{r} 20 \\ \times 0.6 \\ \hline 12 \end{array}$ <p>$20 \times 0.6 = 12$ $20 - 12 = 8$</p>	<p>認為打折的折數愈低愈便宜，因為丙超商打六折，就愈便宜。</p>
0	0-C	<p>A 甲②因為買送1瓶可為降低更多錢</p>	<p>認為贈送可減少付出很多錢。</p>
0	0-C	<p>甲超商，因為每買三瓶就送一瓶飲料，所以很快就可以買到10瓶瓦了。</p>	<p>認為贈送可快速達成購買10瓶的目標。</p>
0	0-D	<p>乙：因為每瓶都打八折的話最後的價格都比其他兩家便宜。</p> <p>$20 \times 0.8 = 16$ $16 \times 10 = 160$</p>	<p>受「每一瓶都打折的影響」，認為每瓶都打折最便宜。</p>
0	0-X	<p>A: 丙超商比較便宜，因為丙的特價讓小蘭省了60元。</p> <p>丙： $10 \div 2 = 5$ $20 \times 0.6 = 12$ $12 \times 5 = 60$ $200 - 60 = 140$</p>	<p>能計算出打六折的單價，但誤認為買5瓶打六折的飲料為便宜的錢數，對於自己在計算什麼並不清楚。</p>



從學生在本題的答題情形來看，學生對於折扣是清楚的，且解題方式是多元的，其思考方式非常多元與開放，這部分是值得肯定的，但學生對於數學题目的限制卻不明白，例如：「總共買 10 瓶飲料」，也不清楚「總共買 10 瓶飲料」與「一次買 10 瓶飲料」的區別，尤其把「每買 2 瓶，第二瓶打六折」誤解為「每買 2 瓶都打六折」、「第二瓶打六折」誤解為「每瓶都打六折」，在在說明學童急於計算，不理解題意，也不清楚题目的限制。

6.教學建議：

從學生答題表現受中文字句影響，因此我們提出以下的建議：

(1) 釐清與比較語意的不同

教學不僅止於教學生會解題，更需要教學童數學的連結，如這一題是生活的連結，教師宜促進學童探討生活中「總共買 10 瓶飲料」與「一次買 10 瓶飲料」、「每買 2 瓶，第二瓶打六折」與「每買 2 瓶都打六折」、「第二瓶打六折」與「每瓶都打六折」的區別，使學童在比較中了解語意，區分每種用法與解題。

(2) 注重數學解題能力的培養

許多學童在解數學問題時，都急於用「+、-、×、÷」寫出數學算式，只停留在會用數學算式解題，但不是具備數學解題能力，因此建議教師在進行數學教學時培養學生解題能力，如時常提醒學童注意「题目的問題」、「题目的資訊」、「题目的限制」。

(3) 反思自己的解題行為

從學生的解題表現，有 $\frac{1}{5}$ 的學童對於自己在進行什麼解題行為是完全不清楚的，如本題中 OX 的解題行為，學童在計算甲超商 10 瓶飲料的總價，一會兒是使用 200 元計算，一會兒是使用 160 元計算，學童自己都不清楚自己是根據什麼樣的條件在計算。因此，建議教師在教學時，要時時提醒學童思考「算式與情境的關係」、「每個數字的意義」，使學生對數學有感覺。

五、因數與倍數—理解公倍數的意義

1. 檢測年度：100 年度

2. 題目：「39□□」是一個四位數，這個數是 2 和 5 的公倍數，這個四位數可能是多少？把可能的答案全部寫出來。

3. 評量目的：

本試題主要在評量學生是否能理解公倍數的意義，並將可能的答案列舉出來。

4. 評閱標準：

評閱標準 2 分有 3 類、1 分有 1 類、0 分有 3 類，相關評閱標準如下表：

表 2-5-1 100 年度數學學力檢測建構反應題第二題評閱標準

類別	評閱標準
2A	寫出 10 個正確答案，並描述找公倍數的方法
2B	直接寫出 10 個正確答案
2C	寫出 9 個正確答案，並描述找公倍數的方法
2D	直接寫出 9 個正確答案
1A	寫出 5-8 個正確答案
0A	空白
0B	只能寫出 1-4 個正確答案
0X	其他

5. 評閱結果：

(1) 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-5-2 100 年度數學學力檢測建構反應題第二題評閱結果統計表

得分類型	0			1	2				合計
	0A	0B	0X	1A	2A	2B	2C	2D	
人數	2	21	64	5	76	53	53	19	293
百分比(%)	0.68	7.17	21.84	1.71	25.94	18.09	18.09	6.48	
人數	87			5	201				
百分比(%)	29.69			1.71	68.6				

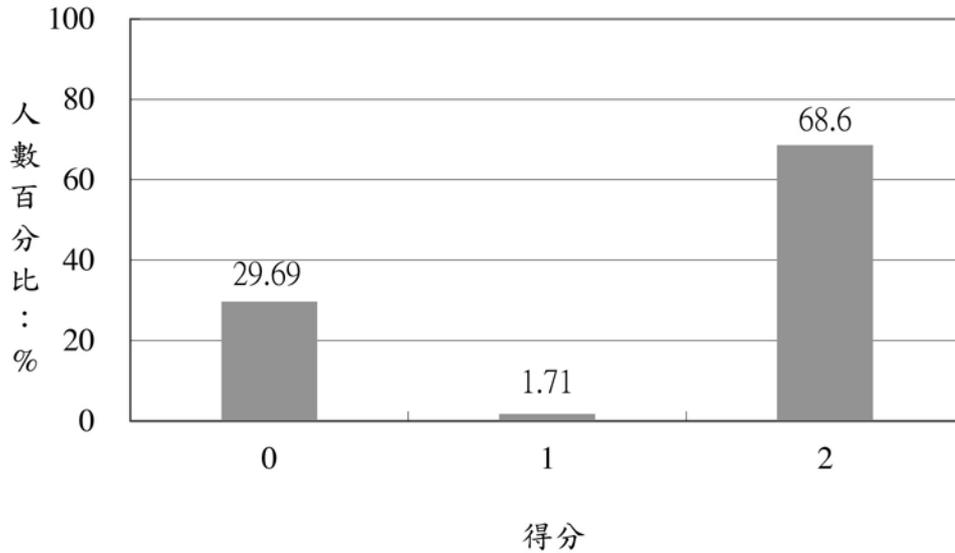


圖 2-5-1 100 年度數學學力檢測建構反應題第二題得分統計圖

由表 2-5-2 可以得知，本試題經評閱後得 2 分情形者有 201 人，占總人數的 68.6%，整體的答對率為六成八。這些得到 2 分的答題類型又分四種：第一種是寫出 10 個正確答案，並描述找公倍數的方法，有 76 人，占總人數的 25.94%；第二種是直接寫出 10 個正確答案，但未描述找公倍數的方法，有 53 人，占總人數的 18.09%；第三種是寫出 9 個正確答案，並描述找公倍數的方法，有 53 人，占總人數的 18.09%；第四種是直接寫出 9 個正確答案，未描述找公倍數的方法，有 19 人，占總人數的 6.48%。

評閱得到 1 分的有 5 人，占總人數的 1.71%。此種類型的學生是只有寫出 5-8 個正確的答案。

評閱得到 0 分的有 87 人，占總人數的 29.69%。這些得到 0 分的答題類型可分為三種：第一種是答題空白，有 2 人，占總人數的 0.68%；第二種是只能寫出 1-4 個正確答案，此種類型的學生有 21 人，占總人數的 7.17%；第三種是亂作答或只填 00、10、20、30……等 2 個數字，而非四位數，這些學生共有 64 人，占總人數的 21.84%。

(2) 答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-5-3 100 年度數學學力檢測建構反應題第二題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	$\begin{array}{r} 1 \overline{) 25} \\ \underline{20} \\ 5 \times 2 \\ = 10 \end{array}$ $10 \times 390 = 3900$ $10 \times 398 = 3980$ $10 \times 391 = 3910$ $10 \times 399 = 3990$ $10 \times 392 = 3920$ $10 \times 393 = 3930$ $10 \times 394 = 3940$ $10 \times 395 = 3950$ $10 \times 396 = 3960$ $10 \times 397 = 3970$ $10 \times 398 = 3980$ $10 \times 399 = 3990$ A: 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399	用短除法求出 2、5 的最小公倍數為 10，再依序乘以 390、391…399 等順序，算出答案。

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	$\begin{array}{l} 11\frac{2.5}{1.1} \\ 3900 + (10 \times 4) = 3940 \\ 3900 + (10 \times 5) = 3950 \\ 3900 + (10 \times 6) = 3960 \\ 3900 + (10 \times 7) = 3970 \\ 3900 + (10 \times 8) = 3980 \\ 3900 + (10 \times 9) = 3990 \end{array}$ $\begin{array}{l} 2 \times 5 = 10 \\ 10 \times 390 = 3910 \\ 3900 + 10 = 3910 \\ 3900 + (10 \times 2) = 3920 \\ 3900 + (10 \times 3) = 3930 \end{array}$ <p>A: 3900, 3910, 3920, 3930, 3940, 3950, 3960, 3970, 3980, 3990.</p>	<p>先求出 2、5 的最小公倍數 10，再算出符合題目中的四位數最小的為 3900，最後再把 3900 加上 10 的 1 倍、2 倍...9 倍，而算出答案。</p>
2	2-A	<p>2、5 公倍數: 10, 20, 30, 40, ...</p> $\begin{array}{l} 3900 = 5 \times 780 = 2 \times 1950 \\ 3910 = 5 \times 782 = 2 \times 1955 \\ 3920 = 5 \times 784 = 2 \times 1960 \\ 3930 = 5 \times 786 = 2 \times 1965 \\ 3940 = 5 \times 788 = 2 \times 1970 \\ 3950 = 5 \times 790 = 2 \times 1975 \\ 3960 = 5 \times 792 = 2 \times 1980 \\ 3970 = 5 \times 794 = 2 \times 1985 \\ 3980 = 5 \times 796 = 2 \times 1990 \\ 3990 = 5 \times 798 = 2 \times 1995 \end{array}$ <p>A: 3900, 3910, 3920, 3930, 3940, 3950, 3960, 3970, 3980, 3990.</p>	<p>先列舉出 2、5 的公倍數 10、20、30... 後，再寫出「39□□」39 後面兩個數字是 00、10、20...90 的四位數；並用乘法確認這些四位數皆是 2 和 5 的倍數。</p>
2	2-A	$39 \square \square \rightarrow \begin{array}{l} \times \\ \checkmark \\ 5, 0 \end{array}$ $39 \square 0 \rightarrow 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ <p>A: 3900, 3910, 3920, 3930, 3940, 3950, 3960, 3970, 3980, 3990.</p>	<p>此類型的解題歷程如下：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 先確認「39□□」 這個四位數若為 2 和 5 的公倍數，其個位數字必定是 0。 2. 再確認十位數是 0~9。 由此推理出所有可能的答案。
2	2-B	<p>A: 3900, 3910, 3920, 3930, 3940, 3950, 3960, 3970, 3980, 3990.</p>	<p>直接列舉出所有的答案，但無描述思考過程或寫出算式。</p>
2	2-C	$\begin{array}{l} 11\frac{2.5}{2.5} \\ 2 \times 5 = 10 \\ 10 \times 2 = 20 \\ 10 \times 3 = 30 \\ 10 \times 4 = 40 \\ 10 \times 5 = 50 \\ 10 \times 6 = 60 \\ 10 \times 7 = 70 \\ 10 \times 8 = 80 \\ 10 \times 9 = 90 \end{array}$ $\begin{array}{l} 3900 + 10 = 3910 \\ 3900 + 20 = 3920 \\ 3900 + 30 = 3930 \\ 3900 + 40 = 3940 \\ 3900 + 50 = 3950 \\ 3900 + 60 = 3960 \\ 3900 + 70 = 3970 \\ 3900 + 80 = 3980 \\ 3900 + 90 = 3990 \end{array}$ <p>A: 3910, 3920, 3930, 3940, 3950, 3960, 3970, 3980, 3990.</p>	<p>先求出 2、5 的最小公倍數 10，再將 3900 加上 10 的 1 倍、2 倍...9 倍，但答案卻漏了 3900。</p>



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-C	$\begin{array}{r} 125 \\ \times 25 \\ \hline \end{array}$ <p>都可以</p> <ul style="list-style-type: none"> $2 \times 5 = 10$ $10 \times 2 = 20$ $10 \times 3 = 30$ $10 \times 4 = 40$ $10 \times 5 = 50$ $10 \times 6 = 60$ $10 \times 7 = 70$ $10 \times 8 = 80$ $10 \times 9 = 90$ $10 \times 10 = 100$ <p>A: 有可能是 3910, 3920, 3930, 3940, 3950, 3960, 3970, 3980, 3990。</p>	<p>先求出 2、5 的最小公倍數 10，再依 10 的 1 倍、2 倍、3 倍...9 倍得出「39□□」這個四位數的十位和個位數，再列舉出所有的答案，但獨漏了 3900。</p>
2	2-D	<p>3910 3920 3930 3940 3950 3960 3970 3980 3990</p>	<p>直接列出 9 個正確的答案，沒寫出其思考過程，且也少寫了 3900。</p>
1	1-A	<p>$(2, 5) = 10$</p> <ul style="list-style-type: none"> $10 \times 2 = 20$ $10 \times 3 = 30$ $10 \times 4 = 40$ $10 \times 5 = 50$ $10 \times 6 = 60$ $10 \times 7 = 70$ $10 \times 8 = 80$ $10 \times 9 = 90$ <p>A: 3920, 3930, 3940, 3950, 3960, 3970, 3980, 3990</p>	<p>先求出 2、5 的最小公倍數 10，再依 10 的 2 倍、3 倍...9 倍，得出「39□□」這個四位數的十位和個位數後，再寫出答案，但漏了 3900 和 3910。</p>
1	1-A	<p>A: 3950 3980 3920 3910 3930 3940 3960 3990</p>	<p>此類型的學生沒有寫出解題過程，只寫出 8 個正確的答案，少寫了 3900 和 3970。</p>

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-B	$\begin{array}{r} 1125 \\ \underline{25} \\ 5 \times 2 = 10 \end{array}$ <p>A: 3910</p>	知道 2 和 5 的最小公倍數是 10，只寫出了 3910 一個答案，無法列舉出其他的答案，此類型的學生可能不了解 2 和 5 的公倍數即是最小公倍數 10 的倍數。
0	0-X	<p>① 2: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 98</p> <p>5: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95</p> <p>② $\begin{array}{r} 1125 \\ \underline{25} \\ 5 \times 2 = 10 \end{array}$</p> <p>A: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90</p>	先列舉出 100 以內所有 2 的倍數和 5 的倍數，再圈選出 2 和 5 的公倍數，但僅列出 10、20、30...90，卻忽略了題目所要求的四位數。
0	0-X	$\begin{array}{r} 1125 \\ \underline{25} \\ 2 \times 5 = 10 \end{array}$ <p>A: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90</p>	用短除法算出 2 和 5 的最小公倍數，但僅列出 10、20、30...90 等數，卻忽略了題目所要求的四位數。
0	0-X	<p>3900</p> <p>10</p> <p>A: 10</p>	知道 2 和 5 的最小公倍數為 10，卻無法列舉出其他答案。
0	0-X	$2 \times 5 = 10$ <p>A: 3910, 3915, 3920, 3925, 3930, 3935, 3940, 3945, 3950, 3955, 3960, 3965, 3970, 3975, 3980, 3985, 3990, 3995</p>	雖然算出 2 和 5 的最小公倍數為 10，列出 3910、3920...3990；但也將個位數字是 5 的一併列出，該解題類型的學生對最小公倍數的意義仍不太理解。



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-X	$2=2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, \dots$ $5=5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, \dots$ 3900-3999的偶數及0結尾的有： 3902, 3904, 3905, 3906, 3908, 3910, 3912, 3914, 3915, 3916, 3918, 3920, 3922, 3924, 3925, 3926, 3928, 3930, 3932, 3934, 3935, 3936, 3938, 3940, 3942, 3944, 3945, 3946, 3948, 3950, 3952, 3954, 3955, 3956, 3958, 3960, 3962, 3964, 3965, 3966, 3968, 3970, 3972, 3974, 3975, 3976, 3978, 3980, 3982, 3984, 3985, 3986, 3988, 3990, 3992, 3994, 3995, 3996, 3998。	知道某數為 2 的倍數，其個位應為偶數，而某數為 5 的倍數，其個位應為 0 或 5。將個位為偶數、0 或 5 的三千九百多的四位數全部列出來，顯見此種解題類型的學生不了解公倍數的意義。

從學生在本題的答題情形來看，學生對於此問題的答對率約六成八，而從答對的類別中，發現答案中少寫 3900 的頗多，其原因可能是在國小階段皆為正整數倍的教學，不將 0 倍列入討論，意即不談 0 是任何數的倍數，故許多學生雖理解 2、5 的公倍數是最小公倍數 10 的倍數概念，但在列舉過程中，因無 0 倍的經驗，故多沒考慮到 3900 這個答案。所以此類型計分，亦給 2 分，列為 2C、2D 類型。此外，本次審閱，將答案為 10、20、30、40...90 視為不正確的解題，雖然得知學生對公倍數的概念是清楚的，但因粗心，沒看清楚題目是要求「這個四位數可能是多少？把可能的答案全部寫出來」，所以答案僅寫出四位數中的十位和個位數。

6.教學建議：

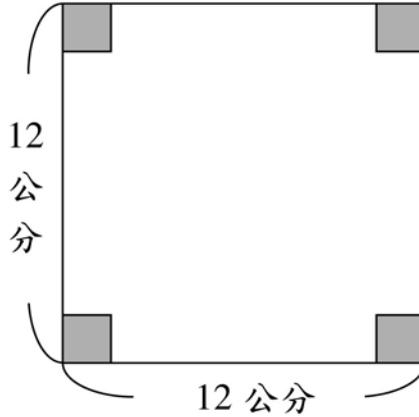
從上述的分析中發現，約三成學生對公倍數的概念仍不太清楚。因此我們提出以下的教學建議供老師參考：

- (1) 在進行倍數教學時，先進行列舉兩個數的倍數教學，等學生熟稔之後，再利用列舉法找出兩個數的公倍數、最小公倍數，增加學生討論與實作的經驗，擴充學生推理與演繹的機會，進而能找出合理且正確的答案。
- (2) 一般教學以找出兩個數的公倍數、最小公倍數為常見的布題，有時學生會不加思索，即以平常解題習慣進行解題，建議教師布題情境或限制條件，可以多一些變化，如限制在一定的範圍之內，列舉出所有可能的兩個數的公倍數答案，讓學生多元思考，而不會僅侷限於單一類型題目，而慣性解題。

六、容量—容積和體積的應用

1. 檢測年度：100 年度

2. 題目：在一個邊長 12 公分的正方形紙張的四個角，分別剪下一個正方形後，將它摺成一個無蓋的長方體(如下圖)。



想想看，是不是剪下的正方形越大，容積就會越大？請把理由寫出來。

剪下的正方形邊長 (公分)	1	2			
容積(立方公分)					

3. 評量目的：

本試題主要在評量容積的概念，雖是二維平面的紙張，學童要能透過想像，計算出無蓋的長方體容積。

4. 評閱標準：

評閱標準 2 分有 2 類、1 分有 3 類、0 分有 10 類，相關評閱標準如下表：

表 2-6-1 100 年度數學學力檢測建構反應題第六題評閱標準

類別	評閱標準
2A	寫出計算過程，列表正確，並能正確說出答案及理由
2B	列表正確，並能正確說出答案及理由
1A	列表正確，未說明理由
1B	計算正確，理由不正確
1C	小部分計算錯
0A	空白
0B	只算出圖中白色部分的面積



0C	只算出圖中灰色部分的面積
0D	只算出圖中摺成的長方體的底面積
0E	誤將長方體底邊的長當成高，求算正方體體積
0F	底面積的底邊不正確，只減去一側灰色正方形的邊長
0G	以灰色正方形的邊長求算容積
0H	以 $12*12$ 減去灰色正方形的邊長或面積
0I	以 $12*12*12$ 減去四個灰色正方形的面積
0X	其他

5. 評閱結果：

(1) 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-6-2 100 年度數學學力檢測建構反應題第六題評閱結果統計表

得分類型	0											1			2		合計
	0A	0B	0C	0D	0E	0F	0G	0H	0I	0J	0X	1A	1B	1C	2A	2B	
人數	16	5	16	17	16	26	28	16	7	4	91	3	5	6	27	10	
百分比 (%)	5.46	1.71	5.46	5.8	5.46	8.87	9.56	5.46	2.39	1.37	31.06	1.02	18.52	2.05	9.22	3.41	
人數	242											14			37		293
百分比 (%)	82.59											4.78			12.63		

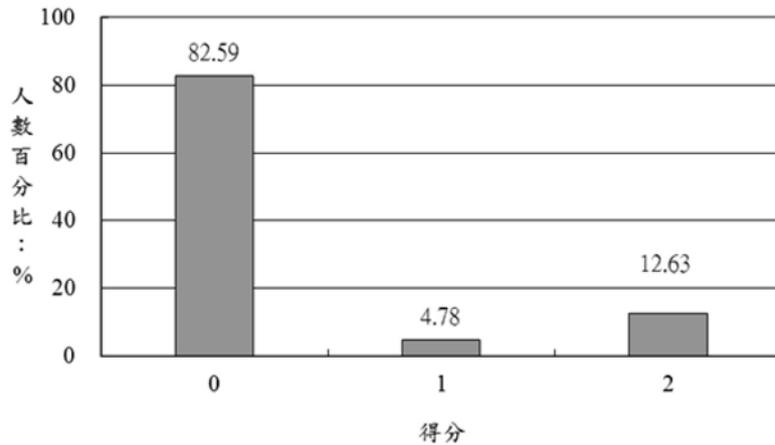


圖 2-6-1 100 年度數學學力檢測建構反應題第六題得分統計圖

由表 2-6-2 可以得知，本試題經評閱後得 2 分的有 37 人，占總人數的 12.63%，整體的答對率將近一成三。這些得到 2 分的答題類型又分成二種：第一種是不僅列表正確，並能寫出計算過程，與正確說出答案及理由： $10 \times 10 \times 1 = 100$ 、 $8 \times 8 \times 2 = 132$ 、 $6 \times 6 \times 3 = 108$ 、 $4 \times 4 \times 4 = 64$ 、 $2 \times 2 \times 5 = 20$ ，單位也正確，這種做答類型的學生有 27 人，占總人數的 9.22%；第二種是列表正確，與正確說出答案及理由，這種做答類型的學生有 10 人，占總人數的 3.41%。

得到 1 分的有 14 人，占總人數的 4.78%。這些得到 1 分的答題類型又分成三種：第一種是列表正確，卻未說明理由，這種做答類型的學生有 3 人，占總人數的 1.71%；第二種是計算正確，但理由不正確，這種做答類型的學生有 5 人，占總人數的 1.81%；第三種是在計算過程中有小部分的錯誤，這種做答類型的學生有 6 人，占總人數的 2.05%。

得到 0 分的有 242 人，占總人數的 82.59%。這些得到 0 分的答題類型又分成十一種：第一種是空白未填答，這種做答類型的學生有 16 人，占總人數的 5.46%；第二種是只算出圖中白色部分的面積，這種做答類型的學生有 5 人，占總人數的 1.71%；第三種是只算出圖中灰色部分的面積，這種做答類型的學生有 16 人，占總人數的 5.46%；第四種是只算出圖中摺成的長方體的底面積，這種做答類型的學生有 17 人，占總人數的 5.8%；第五種是誤將長方體底邊的長當成高，求算正方體體積，這種做答類型的學生有 16 人，占總人數的 5.46%；第六種是底面積的底邊不正確，只減去一側灰色正方形的邊長，這種做答類型的學生有 26 人，占總人數的 8.87%；第七種是以灰色正方形的邊長求算容積，這種做答類型的學生有 28 人，占總人數的 9.56%；第八種是以 12×12 減去灰色正方形的邊長或面積，這種做答類型的學生有 16 人，占總人數的 5.46%；第九種是以 12×12 減去灰色正方形的邊長或面積，這種做答類型的學生有 7 人，占總人數的 2.39%；第十種是以 $12 \times 12 \times 12$ 減去四個灰色正方形的面積，這種做答類型的學生有 4 人，占總人數的 1.37%。第十一種是胡亂作答，這種做答類型的學生有 91 人，占總人數的 31.06%。



(2)答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-6-3 100 年度數學學力檢測建構反應題第六題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析												
2	2-A	<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <td>剪下的正方形邊長 (公分)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>容積(立方公分)</td> <td>100</td> <td>128</td> <td>108</td> <td>64</td> <td>20</td> </tr> </table> <p> $10 \times 10 \times 1 = 100$ $8 \times 8 \times 2 = 128$ $6 \times 6 \times 3 = 108$ $4 \times 4 \times 4 = 64$ $2 \times 2 \times 5 = 20$ </p> <p>不因為到了一定的地步，長和寬變小了，雖然高變大，但還是會減少。 容積</p>	剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5	容積(立方公分)	100	128	108	64	20	<p>這類學童清楚長方體的長、寬、高的長，並能清楚說明體積的變化。</p>
剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5										
容積(立方公分)	100	128	108	64	20										
2	2-A	<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <td>剪下的正方形邊長 (公分)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>容積(立方公分)</td> <td>100</td> <td>128</td> <td>108</td> <td>64</td> <td>20</td> </tr> </table> <p> $12 - (1 \times 2) = 10$ $10 \times 10 \times 1 = 100$ $12 - (2 \times 2) = 8$ $8 \times 8 \times 2 = 128$ $12 - (3 \times 2) = 6$ $6 \times 6 \times 3 = 108$ $12 - (4 \times 2) = 4$ $4 \times 4 \times 4 = 64$ $12 - (5 \times 2) = 2$ $2 \times 2 \times 5 = 20$ </p> <p>A: ① 不是 ② 因為剪下一公分時是 100 cm^3 而剪下二公分正容積增加 28 cm^3 變成了 128 cm^3 但剪下三公分時容積卻又減少了 20 cm^3 變成了 108 cm^3 而剪下四公分五公分的正方形時容積也逐漸減少所以答案就是不是</p>	剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5	容積(立方公分)	100	128	108	64	20	<p>這類學童說明如何得之長方體底面的長，並能將理由說明清楚。</p>
剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5										
容積(立方公分)	100	128	108	64	20										
2	2-A	<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <td>剪下的正方形邊長 (公分)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>容積(立方公分)</td> <td>100</td> <td>128</td> <td>108</td> <td>64</td> <td>20</td> </tr> </table> <p> $12 - 2 = 10$ $10 \times 10 \times 1 = 100$ $12 - 4 = 8$ $8 \times 8 \times 2 = 128$ $12 - 6 = 6$ $6 \times 6 \times 3 = 108$ $12 - 8 = 4$ $4 \times 4 \times 4 = 64$ $12 - 10 = 2$ $2 \times 2 \times 5 = 20$ </p> <p>① ② (理由) A: ① 不是 ② (理由)</p>	剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5	容積(立方公分)	100	128	108	64	20	<p>此類學童透過圖示與計算說明解題歷程，也發現容積的改變。</p>
剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5										
容積(立方公分)	100	128	108	64	20										

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析												
2	2-B	<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <td>剪下的正方形邊長 (公分)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>容積(立方公分)</td> <td>100</td> <td>128</td> <td>108</td> <td>64</td> <td>20</td> </tr> </table> <p>①不是 A: ②因為算完上面的第二、三次後到第四次以後容積就越變越小了。</p>	剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5	容積(立方公分)	100	128	108	64	20	此類學童能完成表格的內容，雖沒有說明計算過程，但其理由說明正確。
剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5										
容積(立方公分)	100	128	108	64	20										
1	1-B	<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <td>剪下的正方形邊長 (公分)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>容積(立方公分)</td> <td>100</td> <td>128</td> <td>108</td> <td>64</td> <td>20</td> </tr> </table> <p> $1. 12 - 1 \times 2 = 10$ $10 \times 10 \times 1 = 100$ $2. 12 - 2 \times 2 = 8$ $8 \times 8 \times 2 = 128$ $3. 12 - 3 \times 2 = 6$ $6 \times 6 \times 3 = 108$ $4. 12 - 4 \times 2 = 4$ $4 \times 4 \times 4 = 64$ $5. 12 - 5 \times 2 = 2$ $2 \times 2 \times 5 = 20$ </p> <p>因為剪的口是越深容積越大。</p>	剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5	容積(立方公分)	100	128	108	64	20	此類學童雖然能計算出長方體的容積，但未能發現容積的變化。
剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5										
容積(立方公分)	100	128	108	64	20										
1	1-C	<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <td>剪下的正方形邊長 (公分)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>容積(立方公分)</td> <td>100</td> <td>128</td> <td>108</td> <td>84</td> <td>20</td> </tr> </table> <p>不對，因為面積變小，容積就跟著變小。</p>	剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5	容積(立方公分)	100	128	108	84	20	此種解題類型沒有計算過程的說明，且部分計算有誤，如剪下正方形邊長 4 公分時，其容積為 64 立方公分，但學童書寫 84 立方公分。
剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5										
容積(立方公分)	100	128	108	84	20										
0	0-B	<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <td>剪下的正方形邊長 (公分)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>容積(立方公分)</td> <td>100</td> <td>128</td> <td>108</td> <td>80</td> <td>0</td> </tr> </table> <p>不會，因為剪下的正方形越大，面積就愈小，所以摺出的容積也就愈小。</p> <p> $12 \times 12 - 1 \times 1 \times 4 = 140$ $12 \times 12 - 2 \times 2 \times 4 = 128$ $12 \times 12 - 3 \times 3 \times 4 = 108$ $12 \times 12 - 4 \times 4 \times 4 = 80$ $12 \times 12 - 6 \times 6 \times 4 = 0$ </p>	剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	6	容積(立方公分)	100	128	108	80	0	此類型學童沒有理解題意，誤解為正方形扣掉灰色部分的面積，僅求出平面圖形中白色部分的面積。
剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	6										
容積(立方公分)	100	128	108	80	0										



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析												
0	0-B	<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <th>剪下的正方形邊長 (公分)</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> </tr> <tr> <th>容積(立方公分)</th> <td>140</td> <td>136</td> <td>132</td> <td>128</td> <td>124</td> </tr> </table> <p> $12 \times 12 = 144$ $144 - 16 = 128$ $1 \times 4 = 4$ $5 \times 4 = 20$ $144 - 4 = 140$ $= 20$ $2 \times 4 = 8$ $144 - 8 = 136$ $144 - 8 = 136$ $3 \times 4 = 12$ $144 - 12 = 132$ $4 \times 4 = 16$ </p> <p style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> 如果剪下正方的邊長越多公分,容積就越變越小,是因為剪下的正方形邊長要跟容積變的著,剪下的公分變多貼的地方也會變多,所以剪越多容積就會變小。 </p>	剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5	容積(立方公分)	140	136	132	128	124	此類型學童不僅沒有理解題意，並誤解灰色正方形的邊長為正方形的面積，錯誤的想法歸類於求出平面圖形中白色部分的面積。
剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5										
容積(立方公分)	140	136	132	128	124										
0	0-D	<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <th>剪下的正方形邊長 (公分)</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> </tr> <tr> <th>容積(立方公分)</th> <td>100</td> <td>64</td> <td>36</td> <td>16</td> <td>4</td> </tr> </table> <p> $12 - 1 \times 2 = 10$ $10 \times 10 = 100$ $12 - 2 \times 2 = 8$ $8 \times 8 = 64$ $12 - 3 \times 2 = 6$ $6 \times 6 = 36$ $12 - 4 \times 2 = 4$ $4 \times 4 = 16$ $12 - 5 \times 2 = 2$ $2 \times 2 = 4$ </p> <p> 不是，因為剪下的正方形越大，只會剩下越少的容積，所以容積不會變大。 </p>	剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5	容積(立方公分)	100	64	36	16	4	此類型的學童誤解長方體的底面積為長方體的體積。
剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5										
容積(立方公分)	100	64	36	16	4										
0	0-E	<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <th>剪下的正方形邊長 (公分)</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> </tr> <tr> <th>容積(立方公分)</th> <td>1000</td> <td>512</td> <td>216</td> <td>64</td> <td>8</td> </tr> </table> <p> $12 - 2 = 10$ $12 - 6 = 6$ $10 \times 10 \times 10 = 1000$ $6 \times 6 \times 6 = 216$ $12 - 4 = 8$ $12 - 8 = 4$ $8 \times 8 \times 8 = 512$ $4 \times 4 \times 4 = 64$ $12 - 10 = 2$ $2 \times 2 \times 2 = 8$ </p> <p> ①不是 不是，因為剪下的正方形越大，邊長就會越短，邊長越短容積就越小。 </p>	剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5	容積(立方公分)	1000	512	216	64	8	此錯誤類型雖能正確計算出底面積，但因為誤解整個長方體為正方體，而有所錯誤。
剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5										
容積(立方公分)	1000	512	216	64	8										

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析												
0	0-F	<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <td>剪下的正方形邊長 (公分)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>容積(立方公分)</td> <td>121</td> <td>200</td> <td>243</td> <td>256</td> <td>245</td> </tr> </table> <p> $12-1=11$ $12-2=10$ $12-3=9$ $12-4=8$ $11 \times 11 = 121$ $10 \times 10 = 100$ $9 \times 9 = 81$ $8 \times 8 = 64$ $121 \times 1 = 121$ $100 \times 2 = 200$ $81 \times 3 = 243$ $64 \times 4 = 256$ </p> <p> $12-5=7$ $7 \times 7 = 49$ $49 \times 5 = 245$ </p> <p> 不一定，~4是因為高慢變高所以容積也會跟著增加可是到5時長寬又變小了所以容積又開始變小所以答案是不定。 </p>	剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5	容積(立方公分)	121	200	243	256	245	此種類型無法正確計算出長方體底邊的長，要扣除兩邊灰色的部份，僅扣除一邊，即誤解底邊的長，而無法正確計算出長方體的體積。
剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5										
容積(立方公分)	121	200	243	256	245										
0	0-F	<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <td>剪下的正方形邊長 (公分)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>容積(立方公分)</td> <td>121</td> <td>200</td> <td>243</td> <td>256</td> <td>245</td> </tr> </table> <p> $12-1=11$ $11 \times 11 \times 1 = 121$ $12-2=10$ $10 \times 10 \times 2 = 200$ $12-3=9$ $9 \times 9 \times 3 = 243$ $12-4=8$ $8 \times 8 \times 4 = 256$ $12-5=7$ $7 \times 7 \times 5 = 245$ </p> <p> A: 不對 因為高越長體積就越大。 </p>	剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5	容積(立方公分)	121	200	243	256	245	此種類型雖為計算容積，但誤解底面積的長(僅扣除一個正方形的邊長)。
剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5										
容積(立方公分)	121	200	243	256	245										
0	0-G	<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <td>剪下的正方形邊長 (公分)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>容積(立方公分)</td> <td>1</td> <td>8</td> <td>27</td> <td>54</td> <td>125</td> </tr> </table> <p> $2 \times 2 \times 2 = 8$ $3 \times 3 \times 3 = 27$ $4 \times 4 \times 4 = 54$ $5 \times 5 \times 5 = 125$ </p> <p> A: 正方形的容積是「邊長\times邊長\times邊長」所以邊長越長，容積就會越大。 </p>	剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5	容積(立方公分)	1	8	27	54	125	此種類型受表格的影響，無法察覺題意，僅受正方形邊長、容積等字影響，而做出錯誤的解題。
剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5										
容積(立方公分)	1	8	27	54	125										
0	0-H	<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <td>剪下的正方形邊長 (公分)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>容積(立方公分)</td> <td>143</td> <td>142</td> <td>141</td> <td>140</td> <td>139</td> </tr> </table> <p> A: 不是 因為每剪下一個它的容積就會少一塊 正方形 剪越大容積就越小。 </p>	剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5	容積(立方公分)	143	142	141	140	139	學童受正方形平面圖形的影響，且無法考慮剪下的邊長為兩邊，所以以正方形面積扣除剪下一邊的邊長，也是不懂算式的意義。
剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5										
容積(立方公分)	143	142	141	140	139										



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析												
0	0-H	<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <td>剪下的正方形邊長 (公分)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>容積(立方公分)</td> <td>140</td> <td>136</td> <td>132</td> <td>128</td> <td>124</td> </tr> </table> <p>A不是因為剪越多公分容積就越小，如果一直加大，那不是整張紙都剪完了，所以正方形剪越大容積就越小。</p>	剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5	容積(立方公分)	140	136	132	128	124	此種類型學童同樣受正方形平面圖形的影響，且誤解剪下正方形的邊長為面積，再將整個正方形面積扣除4個正方形邊長。
剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5										
容積(立方公分)	140	136	132	128	124										
0	0-I	<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <td>剪下的正方形邊長 (公分)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>容積(立方公分)</td> <td>1920</td> <td>1864</td> <td>1812</td> <td>1760</td> <td>1712</td> </tr> </table> <p>A不是因為剪掉愈大的正方形會使邊長變短，使容積變小。</p> <p> $12 \times 12 \times 2 = 1920$ $2 \times 2 \times 2 = 8$ $1920 - 8 = 1912$ $4 \times 4 \times 4 = 64$ $1912 - 64 = 1848$ $6 \times 6 \times 6 = 216$ $1848 - 216 = 1632$ $8 \times 8 \times 8 = 512$ $1632 - 512 = 1120$ $10 \times 10 \times 10 = 1000$ </p>	剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5	容積(立方公分)	1920	1864	1812	1760	1712	此種類型誤解容積為大容積減小容積，亦即為大的正方體體積扣掉小正方體的體積，大正方體的邊長為12公分，小正方體的邊長為剪下正方形邊長的兩倍，受「剪下」影響，而不會找出立體圖形的長、寬、高。
剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5										
容積(立方公分)	1920	1864	1812	1760	1712										
0	0-X	<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <td>剪下的正方形邊長 (公分)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>容積(立方公分)</td> <td>12</td> <td>6</td> <td>4</td> <td>3</td> <td>2</td> </tr> </table>	剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	6	容積(立方公分)	12	6	4	3	2	此種類型為湊12的解，誤解剪下正方形的邊長 \times 容積=12，完全不懂題意。
剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	6										
容積(立方公分)	12	6	4	3	2										
0	0-X	<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <td>剪下的正方形邊長 (公分)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>容積(立方公分)</td> <td>10</td> <td>8</td> <td>6</td> <td>4</td> <td>2</td> </tr> </table> <p>每剪下一個正方形就會少一公分的容積也會少一立方公分</p>	剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5	容積(立方公分)	10	8	6	4	2	學童胡亂作答，沒有規則可循。
剪下的正方形邊長 (公分)	1	2	3	4	5										
容積(立方公分)	10	8	6	4	2										

從學生在本題的答題情形來看，學童不易察覺立體圖形的各個邊長，以至於答對率相當低。另外，從學童書寫的算式，我們發現學童不理解算式的意義，如體積一面積、體積一邊長、面積一邊長，因此讓學童操作幾何圖形、了解算式的意義，顯得相當重要。

6.教學建議

(1) 讓學生操作幾何圖形，增強學童心像。

從學童的解題類型，我們得知學童無法想像剪下正方形邊長後的長方體圖形，因此，建議教師在教學上宜讓學童多操作，學童才易有圖形的心像，才能想像各種形體。等各個形體形成，也要讓學童找出各個形體的長、寬、高，才能正確算出形體的體積和容積。

(2) 學童寫出算式後，教學上宜多探討算式的意義。

學童的錯誤類型可以讓教師得知學童的認知，並在教學上做些改變與增強，例如學童將體積-面積，學童不知算式的意義，如果教學上多探討算式的意義，學童可透過反思，修改自己的算式，因此，不僅要學童寫出算式，更要學童檢視整個算式的意義，促進學童後設認知的能力，讓學童能監控自己的學習。

(3) 整合相關概念，讓學童釐清不同概念之間的同異之處。

學童到了六年級，已學了面積、體積、容積的概念，因此，教師在教學上應將三個概念做歸納、統整，讓學童釐清面積和體積(容積)之間的關係、體積與容積之間的關係，這樣一來，學童才能對數學學習有完整的概念，如求算體積時，應求出形體的底面積和高，底面積是面的大小，是平面的形體；而體積是物體在空間的大小，是立體的。



七、重量—公噸、公斤的化聚與估計

1. 檢測年度：96 年度

2. 題目：

「一隻非洲象重 4.8 公噸，牠大約是多少個六年級學生合起來的重量？你是怎麼估算的？把你的想法與做法寫下來。」

3. 評量目的：

本試題主要在評量學生(1)能理解公噸與公斤之間的關係並加以換算，(2)具有重量的量感並進行重量的估算。

4. 評閱標準：

評閱標準 2 級分有 1 類、1 級分有 2 類、0 級分有 4 類，相關評閱標準如下表：

表 2-7-1 96 年度數學學力檢測建構反應題第二題評閱標準

類別	評閱標準
2-A	合理估計，單位換算及計算正確
1-A	合理估計，單位換算正確，計算錯
1-B	不合理估計，單位換算正確，計算正確
0-A	空白
0-B	估計正確，單位換算錯誤
0-C	估計錯誤，單位換算錯誤
0-X	其他

5. 評閱結果：

(1) 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-7-2 96 年度數學學力檢測建構反應題第二題評閱結果統計表

得分	0				1		2	合計
	0A	0B	0C	0X	1A	1B	2A	
人數	27	49	3	36	16	13	151	295
百分比(%)	9.15	16.61	1.02	12.20	5.42	4.41	51.19	
人數	115				29		151	
百分比(%)	38.98				9.83		51.19	

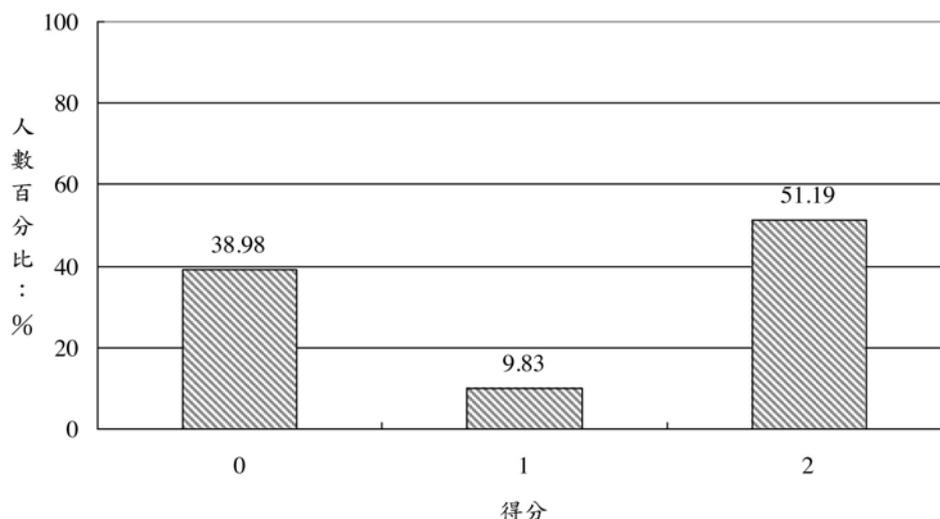


圖 2-7-1 96 年度數學學力檢測建構反應題第二題得分統計圖

由表 2-7-2 可以得知，本試題經評閱後得 2 級分情形者有的有 151 人，占總人數的 51.19%，整體的答對率為五成一。這些得到滿分的答題類型為合理估計一個小學生的重量，並能將 4.8 公噸換算成 4800 公斤，再算出是多少個小六學生的重量。

評閱得到 1 級分的有 29 人，占總人數的 9.83%，可分為二種類型：第一種是合理估計一個小學生的重量，並能將 4.8 公噸換算成 4800 公斤但在計算 4800 公斤是多少學生的重量合起來時計算有誤，有 16 人，占全部人數的 5.42%；第二種類型是能將 4.8 公噸換算成 4800 公斤且能計算正確，卻無法合理的一個小六學生的重量，有 13 人，占全部人數的 4.41%。

評閱得到 0 級分的有 115 人，可分為四種類型：第一種是答題空白，有 27 人，占全部人數的 9.15%；第二種是合理估計出一個小六學生的重量，卻無法正確換算出 4.8 公噸是多少公斤，有 49 人，占 16.61%，是錯誤類型中所佔比例最高的；第三種是無法合理估計且無法進行公噸、公斤的換算，有 3 人，占 1.02%；第四種是胡亂作答，有 36 人，占 12.20%。

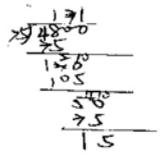
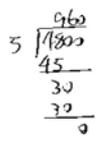
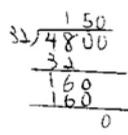
(2) 答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-7-3 96 年度數學學力檢測建構反應題第二題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	$4.8 \text{ 公噸} = 4800 \text{ kg}$ $4800 \div 50 = 96$ 六年級生 50 kg $\rightarrow 96 \text{ 個或 } 1 \text{ 個六年級生為 } 50 \text{ kg 去算}$	這類型解法的學生均能合理的估計一個小六學生的重量約為 35~55 公斤，不管是先換算或是後換算 4.8 公噸，每個細節都正確。



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	$4.8 \times 1000 = 4800$ $35 \overline{) 4800}$ $\begin{array}{r} 137 \\ 35 \times 137 = 4795 \\ \hline 4800 - 4795 = 5 \end{array}$ $137 + 1 = 138$ <p>A = 138個六年級學生 1公噸 = 1000kg 所以將4.8公噸改換成4800kg, 一個六年級生大約重35kg, $4800 \text{kg} \div 35 \text{kg}$ 就大約是138位六年級學生的重量</p>	
2	2-A	<p>班上最重的人 約50kg 最輕的人約設六年級學生約重40kg</p> $4.8 \text{ t} = 4800 \text{ kg}$ $4800 \div 40 = 120$ <p>A: 120個</p>	
2	2-A	$4.8 = 4800 \text{ kg}$ <p>六年級男女平均體重差不多是48kg, 所以我 就用4800kg去除以48kg, 就可以了!</p> $4800 \div 48 = 100$ <p>A: 大約100個人</p>	
2	2-A	<p>一個六年級生體重約38kg</p> $4.8 \text{ t} = 4800 \text{ kg}$ $4800 \div 38 = 126 \dots 12$ $126 + 1 = 127$ <p>A: 127人</p> $\begin{array}{r} 126 \\ 38 \overline{) 4800} \\ \underline{38} \\ 100 \\ \underline{76} \\ 240 \\ \underline{228} \\ 12 \end{array}$	這類型的學生不僅能合理估計、換算正確，在除不盡的時候，以無條件進入的方法取概數。
2	2-A	$4.8 \text{ 公噸} = 4800 \text{ 公斤}$ <p>一個六年級生 = 55kg</p> $4800 \div 55 = 87 \dots 15$ <p>A: 87個</p>	這類型的學生不僅能合理估計、換算正確，在除不盡的時候，以無條件捨去的方法取概數。

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
1	1-A	$4.8 \times 1000 = 4800$ $4800 \div 35 = 137 \dots 15$  一個六年級身體重大約 35 kg 左右, 所以大象的體重除以六年級的體重, 答案就是大約人數。 A: 137 人	這類型的學生雖然能合理估計、換算正確, 但在除法的運算時出現錯誤。 $4800 \div 35$ 時應等於 137 時, 計算錯誤成 131。
1	1-A	$4.8 \text{ 噸} = 4800 \text{ kg}$ $4800 \div 40 = 1200$ A: 約 1200 個學生 我估六年級大概平均 40 kg, 非洲象的重量 \div 平均 = 答案	$4800 \div 40$ 應等於 120 時, 計算錯誤成 1200。
1	1-A	六年級約 50 kg $4.8 \text{ 公噸} = 4800 \text{ kg}$ $4800 \div 5 = 960$  A: 960 個 A: 小朋友有重有輕, 用 50 公斤比較接近答案。	$4800 \div 50$ 卻計算錯誤成 $4800 \div 5$ 。 $4800 \div 500$ 時, 計算錯誤成 1200。
1	1-B	$4.8 \text{ 噸} = 4800 \text{ kg}$ $4800 \div 30 = 160$ A: 160 人 我們班大部份的人體重由 30 到 50 的人最多所以我用 30 來計算。	學生估計一個小六的學生重量數字是不合理的, 此類型為低估。
1	1-B	$4.8 = 4800$  A: 150 個 想法我以正常理去想, 班級皆在三十幾公斤左右, 所以我先 4.8 公噸換算, 在以三十幾位數一個給慢慢除	學生估計一個小六的學生重量數字是不合理的, 此類型為低估。



得分	類型	解題類型舉隅	解題 (錯誤) 類型分析
0	0-B	$4.8 \text{公噸} = 480 \text{公斤}$ $12 \times 40 = 480$ A: 12個把每個六年級學生的體重都化為40kg, 這樣就大約是非洲象的體重了。	這類的學生能合理的估計出一個小 6 學生的重量, 但在換算 4.8 公噸是幾公斤時發生錯誤。
0	0-B	$4.8 \text{公噸} = 480 \text{公斤}$ 六年級學生 ≈ 40 (適中) $480 \div 40 = 12$ A 大約 12 位六年級生	將 4.8 公噸換算成 480 公斤。
0	0-B	$4.8 \text{公噸} = \text{大約 } 48000 \text{公斤}$ $48000 \div 50 = 960$ $\begin{array}{r} 960 \\ 50 \overline{)48000} \\ \underline{450} \\ 300 \\ \underline{} \\ 0 \end{array}$ A = 大約是 960 個學生	將 4.8 公噸換算成 48000 公斤。
0	0-C	非洲象重 4.8 公噸, 把學生的重量加上去, 然後乘以幾個。 $4.8 \text{公噸} = 48000$ $30 \times 1600 = 48000$	這類的學生既無法合理的估計出一個小 6 學生的重量, 在換算 4.8 公噸是幾公斤時也發生錯誤, 對於單位換算有困難, 同時也沒有重量的量感。
0	0-X	$4.8 \times 6 = 28.8$ $28.8 \approx 29$ A: 29 個	此種學生計算數學問題不是從了解題意入手, 而是思考該如何用加減乘除將數字結合起來, 因此就出現數字亂湊的情形。
0	0-X	$\begin{array}{r} 4.8 \\ + 6 \\ \hline 5.4 \end{array}$ A: 5.4	
0	0-X	$\begin{array}{r} 98 \\ 6 \overline{)48} \\ \underline{48} \\ 0 \end{array}$	

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-X	$4.8\text{公噸} = 480\text{公斤}$ $60 \times 8 = 480$ $480 \div 8 = 60$ $40 \times 12 = 480$ $50 \times 8 = 400$ $50 \times 9 = 450$ $50 \times 10 = 500$ $40 \times 8 = 320$ $40 \times 9 = 360$ $40 \times 10 = 400$ $40 \times 11 = 440$ 六年級學生 A: 60公斤 8個, 50公斤 10個, 40公斤 12個	此類型的學生試圖解決這個問題的方式是採各重量的組合，但由於對平均數的不了解而產生了錯誤。
0	0-X	$\begin{array}{r} 30 \\ \times 1000 \\ \hline 30000 \end{array}$ $\begin{array}{r} 40 \\ \times 1000 \\ \hline 40000 \end{array}$ $\begin{array}{r} 50 \\ \times 1000 \\ \hline 50000 \end{array}$ A: ① 1000 個 因為一位六年級生差不多 30~50多, 1000個的話就差不多	
0	0-X	$\begin{array}{r} 0.8 \\ 69 \overline{) 4.80} \\ \underline{4.80} \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 6 \\ 28 \overline{) 14.8} \\ \underline{14.8} \\ 0 \end{array}$ A: 6個, 先算出每位學生的重量, 在用大象的重量去除學生的重量。	此類的學生正確選擇除法，但對於小數除法的計算規則缺乏瞭解。
0	0-X	我記得一個六年級生大約是 45 kg $45 \times 4.8 = 216$ $\begin{array}{r} 45 \\ \times 4.8 \\ \hline 360 \\ 1800 \\ \hline 2160 \end{array}$ A: 216個	學生選擇錯誤的運算策略，本題應以除法解題，學生卻採用乘法。
0	0-X	$\begin{array}{r} 160 \\ 300 \overline{) 48000} \\ \underline{300} \\ 1800 \\ \underline{1800} \\ 0 \end{array}$ A: 160人	此類學生對於學生的重量估計錯誤且換算公噸成幾公斤時也出現錯誤。
0	0-X	① 一個六年級約 = 9600 公斤 = 9.6 公噸 $9.6 \div 4.8 = 2$ 個 A: ① 2個六年級 ② 因為六年級大約有 240 人 每人大約 40 公斤 $240 \times 40 = 9600$	此類學生對於學生的重量估計錯誤之外深受除法應是「大數除以小數」的影響而錯誤。



從學生在本題的答題情形來看，有 56.61% 的學生能夠合理估計一個小學生的重量，並能正確換算，只是其中有 5.42% 的學生在換算時計算錯誤。另外值得注意的是有 4.41% 的學生無法合理估計，但能正確換算；有 21.35% 的學生不知如何進行合理的估計和換算；有 16.61% 能合理估計，但不能正確換算，換言之，合計有 37.96% 的學生無法正確進行重量公噸和公斤間的換算，有 25.76% 的學生無法合理估計。

6. 教學建議：

- (1) 培養學生的量感：讓學生透過測量實物重量的活動，讓學生獲得量感，例如，一個水壺的水大約重 1 公斤、1 個蘋果的重量大約 300 公克等。
- (2) 培養估計的能力：教師適當安排估計的學習活動，讓學生探討估計的方法，以獲得估計的能力。例如：估計電梯的載重量、估計一部小型貨車的載重量、估計一個禮堂可以容納的學生人數等，教學重點在於讓學生判斷估計的合理性。
- (3) 培養學生單位換算的能力：教師教學時應重視概念的教學，如 4.8 公噸換算成幾公斤時，宜說成「4.8 公噸是 4 個 1 公噸和 0.8 個 1 公噸，也就是 4 個 1000 公斤和 0.8 個 1000 公斤，合起來是 4800 公斤」，教學時不能僅在計算層次的教學，如「1 公噸 = 1000 公斤，4.8 公噸 = $1000 \times 4.8 = 4800$ 公斤」。

八、角度

(一) 使用量角器實測與畫角

1. 檢測年度：98 年度

2. 題目：

「有一個三角形，小明把其中的一個角撕去後，結果如下圖。請問小明撕去的角是幾度？把你的做法寫下來。(可以使用量角器來幫助你作答)



3. 評量目的：

本試題主要在評量學生能否正確使用量角器並了解三角形內角和為 180 度。

4. 評閱標準：

評閱標準 2 分有 2 類、1 分有 3 類、0 分有 6 類，相關評閱標準與舉隅如下表：

表 2-8-1 98 年度數學學力檢測建構反應題第一題評閱標準

類別	評閱標準 (評閱舉隅)
2-A	能正確量出底角，再利用三角形三內角和求解。 例如： $180 - (100 + 35) = 45$ 或 $180 - 100 - 35 = 45$ 。
2-B	補畫缺角，量出 $45^\circ (\pm 2^\circ)$ 。
1-A	只寫答案 45° ，未寫做法或做法不正確。
1-B	兩底角量對，但計算錯誤或算式不正確。
1-C	兩底角量對且計算正確，但缺角標示有誤。
0-A	空白
0-B	量角器量 100° ，看成 80° ；量角器量 35° ，看成 145° 。
0-C	補畫缺角，但測量錯誤。
0-D	兩底角量錯(誤差 $> 2^\circ$)。
0-E	量撕裂角上之角度，如： $40 + 50 + 70 = 160$ 。
0-X	其他，例如： $100 - 35 = 65$ ；出現 360° 。



5. 評閱結果：

(1) 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-8-2 98 年度數學學力檢測建構反應題第一題評閱結果統計表

得分 類型	0						1			2		合計
	0A	0B	0C	0D	0E	0X	1A	1B	1C	2A	2B	
人數	1	14	6	4	2	27	6	5	3	192	31	291
百分比(%)	0.34	4.18	2.06	1.37	0.69	9.28	2.06	1.72	1.03	65.98	10.65	
人數	54						14			223		
百分比(%)	18.56						4.81			76.63		

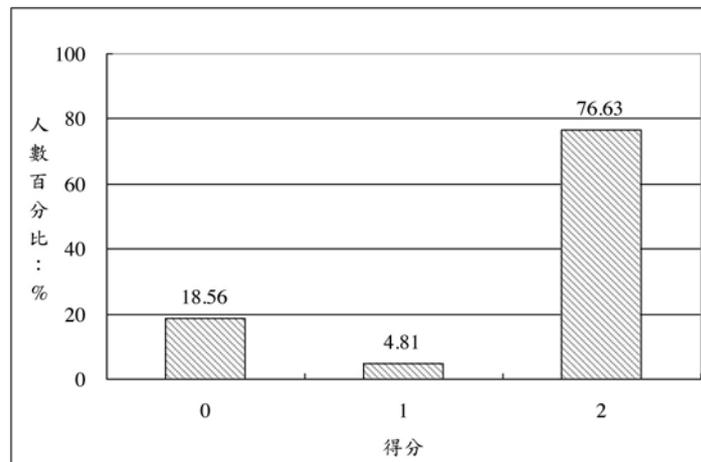


圖 2-8-1 98 年度數學學力檢測建構反應題第一題得分統計圖

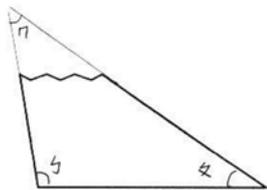
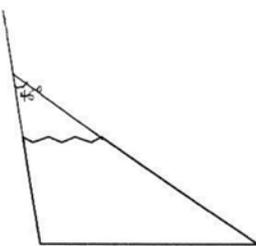
由表 2-8-2 可以得知，本試題經評閱後得 2 分情形者有 223 人，占總人數的 76.63%，整體的答對率為七成六。這些得到 2 分的答題類型又分二種：第一是能正確量出底角，再利用三角形三內角和求解(例如： $180 - (100 + 35) = 45$ 或 $180 - 100 - 35 = 45$)，得出正確答案，有 192 人，占總人數的 65.98%；第二是補畫缺角，量出 45° (誤差在 $\pm 2^\circ$ 以內)而得出正確答案，有 31 人，占總人數的 10.65%。

得到 1 分的有 14 人，占總人數的 4.81%。得到 1 分的答題類型又分為三種：第一種是只寫答案 45° ，未寫做法或做法不正確，此種做答類型的學生有 6 人，占總人數的 2.06%；第二種是兩底角量對，但計算錯誤或算式不正確，此種做答類型的學生有 5 人，占總人數的 1.72%；第三種是兩底角量對且計算正確，但缺角標示有誤，此種做答類型的學生有 3 人，占總人數的 1.03%。

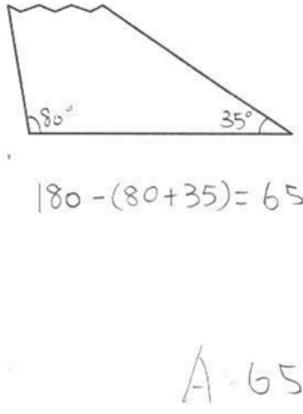
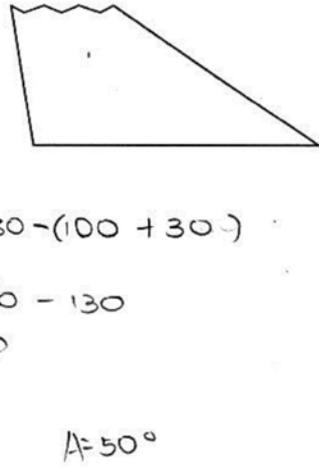
得到 0 分的有 54 人，占總人數的 18.56%。得到 0 分的做答類型可分為六種：第一種是答題空白，僅有 1 人是這種情形。第二種是量角器量 100° ，看成 80° ；或是量角器量 35° ，看成 145° ，有 14 人，占總人數的 4.81%。第三種是補畫缺角，但測量錯誤，有 6 人，占總人數的 2.06%。第四種是兩底角量錯(誤差 $> 2^\circ$)，有 4 人，占總人數的 1.37%。第五種是量撕裂角上之角度，如： $40 + 50 + 70 = 160$ ，僅有 2 人。第六種是胡亂作答，例如： $100 - 35 = 65$ ；出現 360° ，有 27 人，占總人數的 9.28%。

(2) 答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-8-3 98 年度數學學力檢測建構反應題第一題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A	 <p>設被撕掉的角為$\angle 7$ $\angle 4 = 100^\circ$ $\angle 3 = 35^\circ$ $\angle 7 = 180^\circ - 100^\circ - 35^\circ = 45^\circ$</p> <p>A: 被撕掉的角是$45^\circ$</p>	能正確量出兩底角，再利用三角形三內角和 180 度減去兩底角和求解。
2	2-B	 <p>因為將兩條線與持尺畫拉長，直至交會，亦 可從兩條線與的交點量出正確的角度</p> <p>A: 45度</p>	以延長三角形兩邊長補畫缺角，並實際量出頂角為 45° 。
1	1-C	 <p>$180 - 135 = 45$</p>	兩底角似乎量對且計算正確，但缺角標示有誤。



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-B	 <p>$180 - (80 + 35) = 65$</p> <p>A = 65度</p>	使用量角器量底角為 100° ，卻標示成 80° 。
0	0-D	 <p>$180 - (100 + 30)$</p> <p>$= 180 - 130$</p> <p>$= 50$</p> <p>A = 50度</p>	底角為 35° 卻量成 30° ，(誤差 $> 2^\circ$)。

從學生在本題的答題情形來看，有高達 76.63% 的學生能正確量出兩底角再以三角形內角和 180 減去兩底角和求解，或直接補畫缺角並正確量出角度，顯示大多數學生能正確使用量角器並明瞭三角形內角和為 180 度。

另有 4.81% 的學生應能正確使用量角器，但無法正確描述、計算或標示如何得到正確答案；有 4.18% 的學生對於量角器上兩排刻度判讀選擇錯誤，如兩底角為 100 度、35 度，此類學生會將之標示為 80 度、145 度，此為使用量角器的典型錯誤，但人數相較不多，顯示學生在此處學習較無困難了。

6. 教學建議：

- (1) 在角度的教學過程中，我們仍強調多實作來讓學生加深印象。量角器的實際測量也需要靠多練習來熟練。教師可指導學生將量角器、三角板等數學工具如直尺一樣，隨身攜帶於書包中，以利平時多接觸。
- (2) 本題題型十分生活化，教師平時可多搜集有別於評量卷上的紙筆測驗題，多設計具體可操作題目，增添學生學習興趣。

(二) 畫出一個指定的度數

1. 檢測年度：99 年度

2. 題目：

「畫一個 135 度的角。(可以使用量角器來幫助你作答)」

3. 評量目的：

本試題主要評量學生是否能使用量角器或三角板正確畫出指定的角。

4. 評閱標準：

評閱標準 2 分有 1 類、1 分有 1 類、0 分有 4 類，相關評閱標準如下表：

表 2-8-4 99 年度數學學力檢測建構反應題第四題評閱標準

類別	評閱標準
2-A	正確畫出 135° ，誤差值 $\pm 2^\circ$ 。
1-A	畫出一個平角分成 135° 和 45° 兩個角，但沒標出哪一個角是 135° 。
0-B	畫成 45° 。
0-C	畫成 130° 。
0-D	畫成 140° 。
0-X	畫成其他度數。

5. 評閱結果：

(1) 評閱結果分析：本試題經評閱後得分情形如下表。

表 2-8-5 99 年度數學學力檢測建構反應題第四題評閱結果統計表

得分 類型	0				1	2	合計
	0B	0C	0D	0X	1A	2A	
人數	15	13	2	31	1	233	295
百分比(%)	5.08	4.41	0.68	10.51	0.34	78.98	
人數	61				1	233	
百分比(%)	20.68				0.34	78.98	

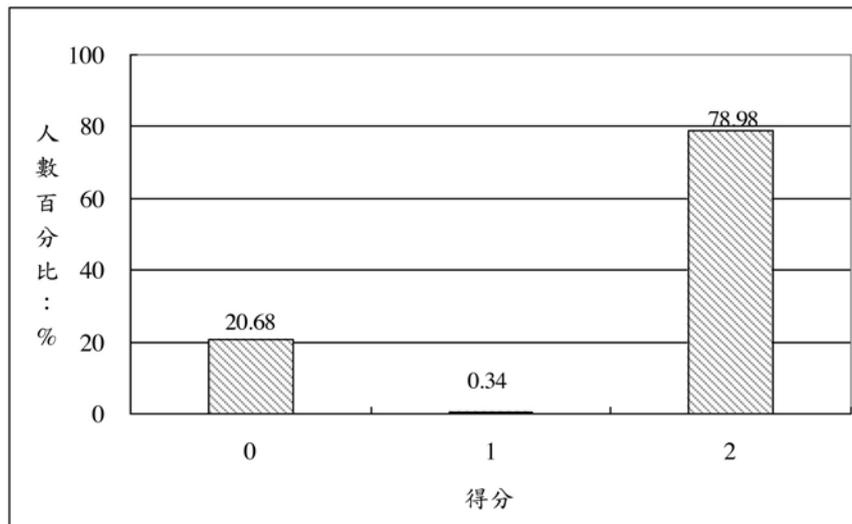


圖 2-8-2 99 年度數學學力檢測建構反應題第四題得分統計圖

由表 2-8-5 可以得知，本試題經評閱後得 2 分的有 233 人，占總人數的 78.98%，整體的答對率約為七成九。這些得到 2 分的答題類型是能正確畫出 135° ，誤差值為 $\pm 2^\circ$ 。

得到 1 分的僅 1 人，占總人數的 0.34%。該生的答題類型是：畫出一個平角分成 135° 和 45° 兩個角，但沒標出哪一個角是 135° 。

得到 0 分的有 61 人，占總人數的 20.68%。得到 0 分的答題類型又分為四種：第一種是畫成 45° ，此種類型的學生有 15 人，占總人數的 5.08%；第二種是畫成 130° ，此種類型的學生有 13 人，占總人數的 4.41%；第三種是畫成 140° ，此種類型的學生有 2 人，占總人數的 0.68%；第四種是畫成其他度數，此種類型的學生有 31 人，占總人數的 10.51%。

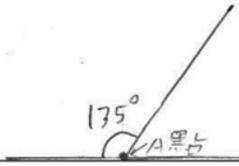
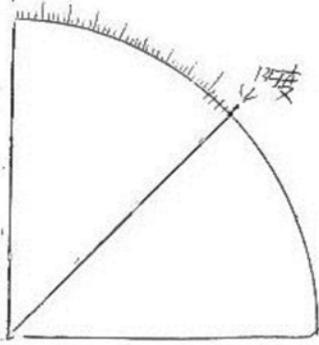
(2) 答題類型分析：學生主要的幾個解題（含錯誤）類型說明如下表。

表 2-8-6 99 年度數學學力檢測建構反應題第四題學生解題類型分析

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A		正確畫出 135° ，誤差值 $\pm 2^\circ$ 。
2	2-A		正確畫出 135° ，誤差值 $\pm 2^\circ$ 。

得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
2	2-A		先使用三角板的 90° 角描繪出 90° ，再描繪出 45° 角，合起來便是 135° 。
1	1-A		畫出一個平角分成 135° 和 45° 兩個角，但沒標出哪一個角是 135°
0	0-B		雖然標示垂直線，但標示 135° 的位置不對，標示不清，不予記分。
0	0-C		畫成 130°
0	0-D		畫成 140°



得分	類型	解題類型舉隅	解題（錯誤）類型分析
0	0-X	<p>做法(1)先畫一條直的線 (2)然後從135°那裡畫一點 (3)再把A點到一黑點連成一條線 就完成了!</p> 	<p>步驟說明尚明確，但卻畫成其他度數</p>
0	0-X		<p>畫成其他度數</p>

從學生在本題的答題情形來看，約有七成九的學生能使用工具正確畫出指定度數的角，這些學生多以量角器輔助其繪圖居多，也有使用等腰直角三角板的角度性質(90°、45°)繪出 135°一角；約有二成的學生卻畫成其他度數，誤差大於 2 度以上，顯現學生操作量角器，定出指定度數時，可能看錯度數或量角器的中心點滑動，以致邊沒有對齊而產生過大的誤差；其中，尚有 5.08%的學生分不清量角器的始邊與終邊，而將 135°畫成 45°角。

6.教學建議：

- (1) 使用量角器測量角度時，可以先從旋轉角開始著手。教師教授旋轉角時，可使用兩色扣條扣在一起，其中一條為角的始邊，抓住另一條做某個方向的旋轉至某個角度停止，使形成一個角，該條扣條即為旋轉角的終邊，使學生清楚旋轉角的起始邊與結束的邊，以做為量角器教學前的鋪陳。將兩色扣條張開一個角度之後，量角器壓置於此角上，讓學生發現欲測量角度，可將量角器的中心點要對齊旋轉角的旋轉中心，量角器的 0°線當作起始邊，接著看終邊在量角器上的刻度，即為角的大小。此外，可多設計不同大小的角(鈍角、銳角和直角)及不同方向的旋轉角(逆時針、順時針方向)讓學生練習測量。

學生數學解題思維探究－建構反應題解題分析（上） /

臺北市國語實驗國民小學，

臺北市國民教育輔導團國小數學學習領域輔導小組編輯。

-- [臺北市]：北市教育局，民 103.05

冊；公分

ISBN 978-986-04-1193-5(上冊)。--

1. 數學教育 2. 小學教學

523.32

103008392

學生數學解題思維探究－建構反應題解題分析（上）

出版者：臺北市政府教育局

發行人：林奕華

指導單位：臺北市教師研習中心

指導教授：楊瑞智、鍾靜

編輯者：臺北市國語實驗國民小學

臺北市國民教育輔導團國小數學學習領域輔導小組

地址：臺北市中正區南海路 58 號

電話：02-23033555*500

指導委員：曾燦金、馮清皇、陳順和、謝麗華、楊玉珊、譚亦聰

總編輯：楊美伶

執行編輯：陳滄智、楊玲珠、張家榕、簡榆婕

編輯小組：方敬慈、石玫芳、江永明、李孟柔、房昔梅、林玉鶯、林旭霓、孫德蘭、
陳心怡、陳穗祥、陳俊龍、翁嘉聲、曾婉菁、蔡淑英、鄧玉芬、駱美如、
戴寶蓮（依姓氏筆劃順序）

I S B N：978-986-04-1193-5

封面設計：陶秉華

印刷公司：巧格印刷品設計工作室

電話：03-5420504

出版日期：103 年 6 月