

## 解決異分母分數的加法問題

董毓琳/臺北市國語實驗國民小學教師

分數看似單純，但是涉及的觀念十分複雜：除了定義什麼是分數之外，什麼是分母、什麼是分子？哪一個代表全部量、哪一個代表部份量？怎麼分數還分真的、假的？等值分數是什麼？為什麼要約分？為什麼要擴分？什麼叫最簡分數？光是分數本身就一堆計算了，更遑論分數與分數之間還有有加減乘除呢！再加上題目的敘述裡，分數到底是「連續量」還是「離散量」的概念影響了學生對題目的了解（老師不見學生圖解分數，絕大部分都在切 PIZZA，其實在指定型態的命題，連老師都極有可能出錯題目），這些因素同時出現在分數的運算中，以至於學生出現有關分數的迷思概念十分多樣，簡直就是到了遇見「分數」就不會有「分數」的程度！

本單元目標是了解擴分與約分的意義、算法、應用；認識通分並能比較分數大小；進行異分母分數加減，「最簡分數」在此暫時不提。

### 設計理念

在異分母分數的加減運算中，學生經常會出現直接分母加分母、分子加分子的作法。本單元教案是由「 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ 」的算式引入「小紅豆的生日快到了，媽媽買了兩包一樣的麵粉，想要製作蛋糕及披薩來幫小紅豆慶祝。媽媽先用一包麵粉做了 2 個披薩，再用另一包麵粉做了 3 個蛋糕。請問製作一個披薩和一個蛋糕，需要多少包麵粉？」的情境，先導引學生畫出  $\frac{1}{2}$  與  $\frac{1}{3}$  的等比例線段圖，確實了解  $\frac{1}{2}$  與  $\frac{1}{3}$  的意義，接著讓學生在線段圖上觀察出  $\frac{1}{2}$  與  $\frac{1}{3}$  單位數的不同，進而找出二者相同的單位數，引出「通分」的說法、意義與算法，最後導引學生歸納出異分母分數加法運算的算則。

在導引學生察覺何謂「通分」的過程，讓學生發現以下事實是極為重要的事：  
1. 發現線段圖上單位數是不同的；  
2. 以最小公倍數算出共同單位數的方法；  
3. 「通分」過程在運算異分母分數加法的必要；  
4. 算則的歸納與鞏固。觀察在教學時學生以上這四項重點充分討論的過程後，是否能釐清「直接分母加分母、分子加分子」的迷思。

### 從提問中讓學生釐清題意

在解決異分母分數的加法問題設計時，運用一些小巧思，讓主探究問題中，

未出現任何的分數表示方式來呈現題意，因此學生必須從問題中清楚了解問題的核心，教師在探究教學中引入階段的關鍵性問話就格外重要。先請學生說出「一包麵粉做 2 個披薩」及「一包麵粉做 3 個蛋糕」的意義。學生可以從題目的意思去了解：一包麵粉可以製作 2 個披薩的情況下，那麼如果製作 1 個披薩只需要用到半包的麵粉，而這半包麵粉如果用分數來表示，就是  $\frac{1}{2}$  包麵粉。再反問學生：

「製作 1 個披薩需要多少包麵粉？」學生很快就能連接並回答：「製作 1 個披薩需要  $\frac{1}{2}$  包麵粉。」利用相同的邏輯推論，學生也可以很快得知：「製作 1 個蛋糕需要  $\frac{1}{3}$  包麵粉。」從循序漸進的提問，讓學生釐清題意後，確認學生清楚明白利用分數的加法來解決問題。

當然在產出「製作 1 個披薩需要多少包麵粉？」答案的過程，有部分學生會有製作 1 個披薩需要用到半包的麵粉，那這半包麵粉就是 0.5 包麵粉。學生會運用舊經驗來幫助學習，因此出現分數或是小數來表示半包麵粉的概念，此時教師不必急著要求學生一定要使用分數來表示，先肯定學生的想法，再進入下一個步驟，解決「製作 1 個蛋糕需要多少包麵粉？」時，學生就會發現「一包麵粉做 3 個蛋糕」，如果只做 1 個蛋糕，需要把麵粉分成 3 份，而製作 1 個蛋糕需用 3 份麵粉中的其中 1 份麵粉，因此學生會得到「製作 1 個蛋糕需要  $\frac{1}{3}$  包麵粉」的結論，在這裡學生無法將  $\frac{1}{3}$  包麵粉用小數表示，自然的學生就會選擇用分數來解決，而不是用小數來處理。

## 以多元思考代替公式化計算

在表示「製作 1 個披薩需要多少包麵粉？」及「製作 1 個蛋糕需要多少包麵粉？」的思考中，不限制學生的想法，不否定學生的答案，讓學生以更多元的方式呈現「製作 1 個披薩需要  $\frac{1}{2}$  包麵粉，製作 1 個蛋糕需要  $\frac{1}{3}$  包麵粉。」利用小組討論的方式，學生交流彼此的想法，聆聽別人不同角度切入的思考，激發學生有更多層次的解題方式。

如何促進學生找到  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$  的求解方式，在學生討論的過程中，產生不同的圖解方式，如：圓餅圖、數線、線段、方塊圖等，甚至利用摺紙，來呈現  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$  包麵粉。當學生畫出  $\frac{1}{2}$  包麵粉及  $\frac{1}{3}$  包麵粉後，要如何進行相加的過程，學生發現

分母不同的分數無法直接進行相加，要將 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 加起來，必須要經過處理。有些學生會快速連結之前學過的分數加法，如果是同樣分母的分數，就可以直接相加進行運算，因此他們經由討論決定將 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 換成相同的分母，這樣的過程需要找到分母2和3共同的倍數，也就是公倍數，學生決定分母用6來進行通分，而得到 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$ 的結論。

經由學生主動探索的過程中，歸納與發現異分母分數加法的規則，與以往教師直接告知學生異分母分數加法的算則，讓學生反覆計算、背誦公式、機械化處理應用問題，更能引起學生的學習興趣。

## 學生表現

老師在引導學生進行討論前，先讓學生思考如何表示 $\frac{1}{2}$ 包麵粉及 $\frac{1}{3}$ 包麵粉，學生直覺反應都會利用圖示來說明。但是在進行 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ 的思考中，學生會發現無法從圖示中去解釋或是找到異分母分數相加的原則，因此放棄使用圖示說明。

教師在學生討論時，進行課堂觀察，不難發現部分學生利用摺紙的概念來呈現 $\frac{1}{2}$ 包麵粉及 $\frac{1}{3}$ 包麵粉，將摺出來的 $\frac{1}{2}$ 包麵粉及 $\frac{1}{3}$ 包麵粉剪下來拼貼後，學生能從拼貼出的答案中，觀察出拼貼結果比原先的一包麵粉來得少，因而發現 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ 的答案比1來的小，但是要再做進一步的推演時，卻不知道如何找出規則。

當然，有少部分的學生在思考時產生了迷思概念，他們簡單認為 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ 的運算只需要將分母的2和3相加，分子的1和1相加，獲得 $\frac{2}{5}$ 的答案，卻忽略的單位量的不同，需要做進一步處理的迷思概念。

進行 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ 如何運算的討論時，學生能運用以學過舊經驗「同分母分數進行加法運算時，只需要將兩個同分母的分子相加，所得到的分數，分母與原先的分母相同」的概念，在圖示 $\frac{1}{2}$ 包麵粉及 $\frac{1}{3}$ 包麵粉就進行處理，把 $\frac{1}{2}$ 包麵粉增加輔助線，產生 $\frac{3}{6}$ 包麵粉；而把 $\frac{1}{3}$ 包麵粉增加輔助線，產生 $\frac{2}{6}$ 包麵粉。再將兩者

合併，就能產生 $\frac{5}{6}$ 包麵粉。學生很快就能歸納出：在進行 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ 的運算時，要先將不同分母的分數進行通分，讓分母變成相同的分數後，才能夠進行加法運算。而這個 $\frac{3}{6}$ 包麵粉及 $\frac{2}{6}$ 包麵粉的分母6，是找到原先分母2和3的公倍數，來進行通分處理。

學生的各種想法及概念，在進行共同探索及討論時，都可以從不同層面的切入點去交流與溝通。當學生小組內達成共識，即使是思考較慢的學生，也能從討論中獲得不同的想法，促進自己概念的建立。再經由全班分享，讓學生各組發表自己想法，自行去澄清各種迷思概念，進而找到解決問題的最佳方式，使學生自己引導出異分母分數加法的通則與概念，讓「學」更有趣。

## 教學省思

回想起以往的教學經驗，總是按照課本流程一步一步進行教學，教師宣告如何計算異分母分數加法的規則後，再讓學生練習課本上所提供的例題。學生在課堂中，很難自行產生概念，習慣靠著老師所提供的公式與想法，帶入各種例題中去計算求解。長期下來，學生處在被動學習、公式化求解與反覆練習的情況，變成不動腦的學習。這樣所產生的知識，可能回家疏於練習就會產生記憶上的斷層，甚至容易遺忘。將探究教學的方式帶入數學的課堂中，跳脫原先課本制式的引導與公式化的計算方式，讓學生主動思考，經由小組及班級討論，交流想法後，由學生自己引導出解決異分母分數加法的概念，並且澄清迷思的錯誤想法，更能讓學生將課堂上所學得的知識，內化成自己的智慧。

在觀察學生思考的過程中，部分學生在表現出 $\frac{1}{3}$ 的圖示或摺紙時遇到了困難，造成學生的困擾，耽誤了思考的時間。在這個部分，下次在設計題目的數字時，可以多加留意，甚至可以加入教師引導的部份，解決學生這部分的困擾，而不影響學生想法的產出。

學生透過小組討論，互相交流想法後，找到解決問題的方法，可以在台上分享，甚至解決其他人所提出的疑問。除此之外，可以從學生的身上看到許多不同的解題方式，以多元的答案呈現異分母分數的加法。由學生自行引導出算則的概念，懂得概念的學生不只要會，還要會陳述，甚至用自己的想法說服別人。當然，聆聽別人的想法，促進自己的想法產生，這也是很重要的原則之一。教師從原先的知識傳遞者退為從旁協助者，讓學生成為課堂的主人，也讓學生覺得學習數學是一件有趣的事情。

## 探究教學簡案設計

教學年級	五年級	教材來源	康軒版第九冊
單元名稱	異分母分數的加減	教學節次	第3節（共6節）
教學設計	董毓琳、任繼孔、陳蕙蓉、陳欣儀	指導教授	鍾靜 教授
探究主題	能解決異分母分數的加法問題		
主探究問題	<p>小紅豆的生日快到了，媽媽買了兩包一樣的麵粉，想要製作蛋糕及披薩來幫小紅豆慶祝。媽媽先用一包麵粉做了2個披薩，再用另一包麵粉做了3個蛋糕。請問製作一個披薩和一個蛋糕，需要多少包麵粉？</p>		
教學內容			
階段	教學流程	關鍵性問話	
<p>引入階段 (提出問題情境，引發學生探究動機，確認任務)</p>	<p>1. 引導學生理解問題：讀完題目後，請學生提出疑問。</p> <p>2. 確認學生理解題目。</p> <p>(1) 確認學生理解「一包麵粉做了2個披薩」、「一包麵粉做了3個蛋糕」的意思。</p> <p>(2) 確認學生理解製作1個披薩需要<math>\frac{1}{2}</math>包麵粉，製作1個蛋糕需要<math>\frac{1}{3}</math>包麵粉。</p> <p>3. 學生能確定探究的問題是製作一個披薩和一個蛋糕所需麵粉為<math>\frac{1}{2} + \frac{1}{3}</math>包。</p>	<p>1-1 小朋友，請閱讀黑板上所揭示的問題，讀完後，對題目裡面的敘述，有任何的問題都可以提出來。你有什麼問題要提出來嗎？</p> <p>2-1 請問「一包麵粉做了2個披薩」及「一包麵粉做了3個蛋糕」的意思是什麼？</p> <p>2-2 製作1個披薩需要多少包麵粉？製作1個蛋糕需要多少包麵粉？</p> <p>3-1 要探究的問題是什麼？</p>	

<p>探索階段 (提問或提示，來引導學生探索問題)</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教師引導學生，利用圖示、數線或文字說明來表示 <math>\frac{1}{2}</math> 包麵粉、<math>\frac{1}{3}</math> 包麵粉。</li> <li>2. 教師提示學生把想法記錄下來。</li> <li>3. 引導學生去探索：異分母分數該如何相加。</li> </ol>	<p>1-1 你們是怎樣表示 <math>\frac{1}{2}</math> 包麵粉、<math>\frac{1}{3}</math> 包麵粉呢？</p> <p>2-1 想想看，<math>\frac{1}{2}</math> 包麵粉和 <math>\frac{1}{3}</math> 包麵粉的分母不一樣，要怎麼相加呢？</p> <p>3-1 請你和小組的組員說明你是怎麼將 <math>\frac{1}{2}</math>、<math>\frac{1}{3}</math> 相加的？為什麼呢？</p>
<p>分享討論階段 (學生分享和說明探索的結果)</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 鼓勵學生與同學分享解題方法。</li> <li>2. 促使學生與同學溝通解題的方法。 學生可能做法： (1) <math>\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}</math> (2) <math>\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}</math> (3) 圖示法</li> <li>3. 促使學生聆聽分享後提出問題與不同觀點。</li> </ol>	<p>1-1 說說看你們是怎麼想的？</p> <p>2-1 請你們說說看，<math>\frac{1}{2}</math>、<math>\frac{1}{3}</math> 的分母不一樣，你們是怎樣相加才能知道總共是多少呢？</p> <p>3-1 你們同意他的做法嗎？</p> <p>3-2 其他同學有沒有疑問要提出的？</p> <p>3-3 有沒有誰還有不同的想法呢？請你分享你的做法。</p>
<p>結論階段 (指導學生總結學到什麼概念、方法及關鍵的想法)</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 鼓勵學生總結探究的核心任務的結果。 (1) 異分母分數相加，要先將分母化成同分母，才可以相加。 (2) 要將異分母分數化成同分母時，要找出它們的公倍數。</li> <li>2. 老師補充探究的核心任務的結果。</li> </ol>	<p>1-1 從剛剛的討論和分享中，你發現了什麼？請你說說看。</p> <p>1-2 當兩個分數的分母不相同時，要怎麼相加？</p> <p>1-3 要怎麼將不同的分母，化成相同的分母呢？</p>

	<p>(1) 異分母分數加法中的分母不同，所代表的單位量也有所不同。</p> <p>(2) 將異分母分數中的分母換成相同分母，才能做加法運算。</p> <p>(3) 在進行異分母分數通分時，我們會選擇兩分數分母的公倍數來進行通分。</p> <p>(4) 兩分數分母公倍數的選擇，最快當然是兩分母相乘，但是有時考量分母數字太大，而找最小的公倍數來進行通分。</p>	
--	---	--