



議題六 平面圖形的條件與包含關係

壹、議題背景

一、九年一貫幾何課程概述

人類是視覺的動物，我們可以把圖形與空間的了解可分為知覺性的了解、操弄性的了解、構圖性的了解、論述性的了解。小學教師在從事幾何教學時，必須避免自己歐氏幾何訓練的干擾，避免處處受制於定義的認定與邏輯順序。由歷史來看，人類是先由應用、操作、實踐中，認識各種幾何要素與性質，彼此之間並沒有一定的先後關係。在小學階段的幾何教學，可以參考幾何歷史發展的軌跡與學童認知發展階段，盡量讓學童發揮、拓展其幾何直覺，在操作中，認識各種簡單幾何形體與其性質，再慢慢加入簡單的推理性質與彼此之間的關係（教育部，2003）。而在九十七年版的數學領域課程綱要（教育部，2008）裡也提及，國小階段的幾何形體理解包含察覺、操作、構造、推理證明等諸面向。從一到三年級來看，此階段的幾何課程較強調幾何形體的認識、探索與操作，學生對幾何形體中的幾何要素，也許能指認，但尚不清楚其結構意義。而到了四到六年級階段，由於數與量的發展逐漸成熟，學生開始結合「數」與「形」兩大主題，學習運用幾何形體的構成要素（如角、邊、面）及其數量性質（如角度、邊長、面積）來描述特殊幾何形體的特徵與性質。

二、教材分析

以下就本項議題，列出分別在九十二年數學領域課程綱要（教育部，2003）及九十七年數學領域課程綱要（教育部，2008）裡，相對應的能力指標及分年細目，以供教師們參考。

表 6 平面圖形性質在九十七年版與九十二年版分年細目之比較

九十七年版		九十二年版	
1-s-02	能辨認、描述與分類簡單平面圖形與立體形體。	1-s-02	能辨認、描述與分類簡單平面圖形與立體形體。
2-s-05	認識簡單平面圖形的邊長關係。	2-s-06	能由邊長關係，認識簡單平面圖形與立體形體。
4-s-01	能運用「角」與「邊」等構成要素，辨認簡單平面圖形。	4-s-01	能運用「角」與「邊」等構成要素，辨認簡單平面圖形。
4-s-02	能透過操作，認識基本三角形與四邊形的簡單性質。	4-s-02	能透過操作，認識基本三角形與四邊形的簡單性質。
6-s-01	能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。	6-s-01	能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。

資料來源：（教育部，2003，2008）

實

務

篇



在九十七年版數學課程綱要（教育部，2008），分年細目 2-s-05 內容認為簡單平面圖形的邊長關係，亦即由實測邊長，知道正方形的四邊相等、長方形的兩對邊長相等、正三角形的邊長相等、等腰三角形的兩腰相等。但此時並不是要定義圖形，只是簡單的藉由實測知道一些常見幾何圖形的邊長性質，這些圖形都有明顯的對稱性質，學童較容易掌握其特徵（教育部，2008）。而在九十二年版的課程綱要裡關於此項分年細目的說明，則是希望由實測邊長，知道邊長相等的幾何形體有正三角形、正方形、正方體（教育部，2003）。其餘內容大致上相同。

三、教師團體對話背景

在數學教師專業對話團體中，第四次活動的主軸是進行「形」教材與教學的相關探討，「形」概念又可分為平面幾何與立體幾何兩大範圍，在此次活動裡，全體對話在平面幾何的議題裡有四個屬於中年級教材，兩個屬於高年級教材。四個中年級議題都圍繞著平面圖形的基本概念與包含關係。而在探討平面圖形基本概念的同時，促進者也適度引導全體參與成員釐清國小幾何教材的教學脈絡發展；然後再談到垂直、平行的概念以及圖形間的包含關係。

貳、學習問題

一、正方形與長方形的包含關係

二、各形狀之間包含關係的教學適切性

參、經驗分享

一、正方形與長方形的包含關係

(一)中低年級

由 van Hiele 的幾何認知發展層次來看，我們知道低年級學童大多停留在 Level 0，亦即僅能從視覺上來判斷及稱呼圖形，還無法分析圖形的構成要素，因此也還未能建立起圖形間的包含關係之能力，因此在低年級的教材裡，教師所處理的應該還是認識正方形、長方形，不需要強調兩者間的包含關係，也要避免在評量時出現此類問題。以下對話則是參與教師提及自己在教學時，曾遇到某版本的低年級教科書要學生分辨正方形和長方形，在接觸 van Hiele 的理論之後，參與者知道在這個階段，不應該告訴學生長方形是包含正方形的：

繼 師：低年級牛頓有一個單元，……題目會出現：假如是正方形，請打勾，長



方形的打圈。

明 師：……我以前在教三、四年級時，也曾經碰到這個問題。

繼 師：既然正方形屬於長方形的一種啊！

明 師：所以後來我就叫他們兩個都打。

川 師：是打圈還是打勾？

明 師：圈跟勾都要打。

瑜 師：……可是到了高年級，他才進入關係期，我覺得那時候再強調說正方形是屬於長方形的一種。……就是低、中年級的時候，■就叫做正方形，■就叫長方形，到高年級才帶入。

明 師：才有辦法去顯示它們彼此間的關係。

在進行圖形與空間的專文導讀以及教學專業成長影帶的觀賞之後，參與者已可以建立應從孩童的幾何認知發展層次出發，去思考自身的教學處理以及教材的使用是否適切。

(二)高年級

在釐清了圖形間的包含關係不應在中低年級時進行教學，應該等到高年級，學生已能從視覺期進入分析期，甚至可以到達非形式演繹期（即關係期），再針對常見的圖形包含關係進行教學。接著又有參與教師提出了另一個疑惑，以下這段對話重點放在教師進行教學時的關鍵用語的處理：

川 師：會有一個問題，就是學生後來會搞混，我們老師以前說這個就叫正方形、那個就叫長方形，你怎麼現在又教這樣？

瑜 師：我並沒有說正方形也可以叫長方形，我是說“正方形也是屬於長方形的一種”，用這樣的語詞。我覺得不能說“這個也叫長方形”，我覺得學生一定會搞混，我明明看它就長的是正方形，你為什麼說它是長方形。正方形也是長方形的一種……

明 師：語言的～

瑜 師：對對對！語言的部分，不能說正方形也叫長方形，不能用「也叫」，對小孩子來講，他覺得莫名其妙嘛！

川 師：就是說不能用「也叫」。

瑜 師：我覺得「正方形是長方形的一種」，這樣比較合適。

上面這段對話讓小組成員們發覺教師在教學時的用字遣詞都必須要注意，否則將造成學生學習上的另一種困難。這個議題在當時的活動中，有數個小組都曾對此進行對話，可見參與者對於圖形間的包含關係的確存有許多疑惑，因為同樣的關係在不同階段的處理卻有不同，因此教師須具有較豐富的數

實

務

篇



學知識與學生數學認知知識，並且技巧的進行教學處理，將更有助於學生的學習。

二、各形狀之間包含關係的教學適切性

在討論圖形間的包含關係時，某位參與者在小組內拋出了這樣的一個問題：真的要學童一定要學習圖形間誰包含誰嗎？因此引發了該組參與者的熱烈討論，有參與者提及自身的學習經驗裡並不覺得這樣的概念很困難，所以當他自己在進行教學的時候，也認為學生很快的就學會了圖形之間的包含關係。接下來，貞師從自己的實際教學經驗出發，進行組內分享：

曹 師：所以他們不可以知道說什麼是鳶形、箏形、正方形囉？

貞 師：他們知道每個形體的定義，但是你要他找關係就比較有難度。

曹 師：找關係的目的是什麼？

貞 師：與其問大圈小圈，不如問正方形及長方形共同有的條件有下面哪些？我以前有叫小朋友寫過，以前沒有那麼多圖形，正方形、長方形，然後菱形，可能還有平行四邊形，右邊有四邊等長，四邊平行，就是有很多選項，你叫他連連看，那不一定要說誰大誰小，誰多誰少，但是可以教得出來說，它有三個條件，它只有二個條件，或一個條件，我覺得這樣可以了吧，一定要畫出誰最大誰最小嗎？只要他知道這個有三個條件成立，它就叫這個形，……

此時，同組的嘉師發言，她認為這是先針對圖形進行個別認識，再去找彼此間的關聯性，就會比較容易了。然後貞師繼續說明，這是從圖形的個別組成條件進行比較與推論，也就是使用集合概念來處理。這是在教學上的處理技巧。而後該組對話又延伸至評量部份。

嘉 師：對呀，所以現在教材裡的考法就變成很多種，它可能只符合一個條件，選擇就會有很多，但同時符合很多條件也許只有一個。譬如同時符合五個條件的只有一個，可是符合四個條件的就有兩個，那表示這兩個圖形有共同的地方，只是說其中一個又比另外一個又多了一個條件，所以就是有點像是親屬關係一樣。

淑 師：現在就是說，他們可能會面臨的問題，就是給學生很多形狀，問“下列哪一個是長方形，請你把他勾選出來”，那正方形到底該不該勾？所以你一定要讓他知道正方形是長方形的一樣，所以一定要引到這邊。

貞 師：可是我覺得考這種題目，很沒有意思。你要讓他們說哪些是長方形，然後你畫一個讓他困惑的東西在那，要他會或不會，你還不如叫他寫出來，成為這個形狀有那些條件。如果考這些類型的題目，然後要他們用



肯定義的方式去檢視每一個圖，還不如連連看。當然能力更好的同學，你可以叫他們做啦。

由上述對話，我們可以知道教學上還是可以有技巧的處理圖形包含關係，例如運用集合概念，而在評量上其實可以避免造成學生認知衝突，產生作答困擾的問題，如果真要了解學生是否真的理解，可以透過課堂上的形成性評量，讓學生個別作答，依據每個學生的發展層次進行評量。

肆、理論與實務

數學教師團體的活動基本上皆包含了教育理論與教學實務兩大方向的内容探討，在閱讀了『造型活動在國小幾何教學中的地位』及『平面圖形教材的處理』兩篇專文，並進行教師專業成長影帶的觀賞後，參與者建立了對幾何教材脈絡及學生幾何認知發展的了解。促進者意圖將對話帶回教學現場，希望參與者思考在教學現場該如何進行教學及評量才是適當的。

促進者……在小學的題目裡面，如果老師給了這些形，要小朋友勾出長方形，那學生沒有勾正方形，那你要怎麼辦？假如你的題目裡有不同大小的正方形，有不同的長方形，高的、胖的、矮的、瘦的，你現在讓學生勾：請你勾出長方形，那學生要不要勾正方形？

此問題拋出後，一時無人回應，經過一小段時間的思考後，成員們的回應節錄如下：

促進者：……這個沒有標準答案！

梅 師：這就是出這種題目的老師很無聊！

促進者：很多人出這種題目啊！妳要怎麼辦？

川 師：……可是教材裡就是這樣寫。

錦 師：對，很多教材裡就有。

促進者：所以我們的意思是說，你要看學生的認知發展。他是能夠有包含關係的想法，還是獨立的想法？因為低年級孩子他們可以是把正方形和長方形看成是不同類的啦！……可是你班上有小朋友把正方形也看成是長方形，你也不能說他是錯。所以你真的瞭解這些包含關係的話，每個孩子的認知發展不一定一樣，大多數低年級孩子的認知是認為正方形跟長方形不一樣，可是有些孩子可能有進到要素期，他可以認同長方形只要四個角是直角……。所以這裡改考卷很難有一致的答案。……

實

務

篇



促進者提到了一個關鍵，有價值的教學應該視學生個體的概念發展來調整，不同個體在幾何概念上的發展層次或有殊異，因此不應該用絕對標準來看各年級孩子應該學到多少，也因為孩童發展層次的不同，教學者應儘量避免以此概念進行紙筆評量。

此外，某一小組在分享與回饋時，針對圖形包含問題的教學處理也提出了一些看法：

貞 師：……回到剛剛的討論當中，我以前是有讓小朋友寫過四個四邊形，正方形、長方形、平行四邊形跟菱形四種寫在左邊，右邊我就寫一些條件，譬如說：四個邊等長，然後三角形一些選項，然後連連看，然後你就可以連出來，譬如說：平行四邊形只有一個條件，那正方形它要有四個條件，四個邊等長、四個角都是直角，相對兩邊平行，它的對角線垂直，這四個條件，後來就發現說你考兩個圖形之間的共通點，譬如「正方形跟平行四邊形有什麼樣的共通點？」會不會比考「有哪些圖形是長方形？」來的好一點？因為他都已经可以更加看細進去了……

促進者：如果從數學的公理來說，正方形為什麼要點到四個條件？以數學來說，正方形兩個條件就可以決定，四個邊等長，四個角都是直角。

貞 師：給他的條件越嚴格……

促進者：如果我們從定義來說，其實這個地方是很複雜的。

貞 師：讓他們比較這兩個圖形的共通點，會不會比他讓勾哪些是長方形來得更好？

促進者：這點也許不錯，比較圖形的共通點，可是也不能把它弄成說正方形的條件比較多，因為從數學上來說，最少的條件可以決定，那是最好的定義。很好啊！你們這組分享的不錯。

從參與者分享的自身教學經驗中，我們可以發現幾何定義的釐清確實有助於教師們進行教學，也能夠提出更多有價值、可行的教學策略。因此將圖形間的包含關係轉化成找出圖形間的共通性，也能確實讓學生從比較、分析中建立正確的概念。

伍、綜合歸納

一、「平面圖形的包含關係」應如何進行教學，對教學現場的老師們來說，確實具有一定的困擾，且教師們的看法也各有不同。低年級時會遇到的是正方形與長方形，到了高年級時會遇到的則是平行四邊形與菱形，其中還有頗具爭議的箏形與菱形的關係。



- 二、從參與成員所分享的教學經驗裡，我們可以發現有的教師運用其它具有對應關係的方式來進行教學，讓學生更容易理解與對照；也有的教師認為可以在教學過程裡避免問學生具有這樣爭議性的問題，而改以其他評量方式來判斷學生是否理解。
- 三、由 van Hiele 提出的幾何形體概念發展理論所提出的階段來看，可分為五個階段：視覺期、分析期、非形式演繹期（關係期）、形式演繹期、公理期。低、中年級學生多停留在視覺期，尚未有圖形的包含概念；高年級學生多已能進入分析期階段，此時較有圖形包含之概念。但發展階段的分別與年級並無直接、絕對的關聯，教師仍應以學生的認知發展歷程來進行教學以及判斷學生的作答合理性。
- 四、為避免每位學生在幾何概念的發展層次上不盡相同，造成評量時很難有一致的答案。建議老師不應在紙筆測驗時出現此類問題，可利用形成性評量的方式，在課堂上隨時檢驗學生的概念。

實

務

篇

