



## 議題一 橫式、直式算式記錄的差異

### 壹、議題背景

#### 一、理論背景

算式泛指的是有運算符號、等號、及結果的表徵格式，它是將符號以特定的組織方式，來呈現一個運算的過程與結果（蔣治邦，1994）。算式是一個溝通的工具，它將運思的方式與結果表達出來，並記錄下了思維歷程，是描述過程的重要的步驟。

橫式和直式的符號組織方式有所不同，學生先接觸到了較為簡單的橫式記錄後，接著會學習到直式的方式，在這轉化的過程中可能會遇到一些困擾，而教師需要講解來讓學生明白，在九年一貫數學課程的數學教材安排上，一年級上學期一般雖已涉及橫式算式記錄，但學生的解題仍然是經由具體操作與點數的策略解題，再將解題的過程與結果以算式加以記錄，而不是使用進退位的方式來進行教學（吳金聰，2008）。而一年級下學期的二位數加減，也是透過具體操作或畫圖解題來進行的，到了二年級之後才會進入了直式的算式，因此需要教師設計規劃教材，來幫助學童體會。

在橫式的算式中，教師要求學生將每個步驟都用完整的算式表徵出來，因為這完整呈現了運算的思維歷程和結果，而在直式的紀錄上，必須強調直式格式的意義，以利直式運算的順暢（蔣治邦，1994），不管是橫式或是直式，對於學生來說都是一種新概念，在教師的引導下，學生才能慢慢的建立正確的數學概念，逐步提升其解題與思考能力。

#### 二、教材分析

目前最新的國民中小學九年一貫課程綱要為九十七年發佈的版本，但是由於本數學教師專業對話團體辦理的時期是使用九十二年版，因此本部分將使用兩種版本一起針對算式記錄概念進行分析。

實

務

篇



表 1 算式記錄在九十七年版與九十二年版分年細目之比較

九十七年版		九十二年版	
1-n-04	能從合成、分解的活動中，理解加減法的意義，使用 $+$ 、 $-$ 、 $=$ 做橫式紀錄與直式紀錄，並解決生活中的問題。	1-n-04	能從合成、分解的活動中，理解加減法的意義，使用 $+$ 、 $-$ 、 $=$ 做橫式紀錄與直式紀錄，並解決生活中的問題。
1-n-05	能熟練基本加減法。	1-n-05	能熟練基本加減法。
2-n-04	能熟練二位數加減直式計算。	2-n-04	能熟練二位數加減直式計算。
2-n-05	能理解三位數加減直式計算(不含兩次退位)。	2-n-05	能作連加、連減與加減混合計算。
2-n-06	能理解乘法的意義，使用 $\times$ 、 $=$ 做橫式紀錄與直式紀錄，並解決生活中的問題。	2-n-06	能理解乘法的意義，使用 $\times$ 、 $=$ 做橫式紀錄與直式紀錄，並解決生活中的問題。
3-n-02	能熟練加減直式計算(四位數以內，和 $<10000$ ，含多重退位)。	3-n-02	能熟練加減直式計算(四位數以內，和 $<10000$ ，含多重借位)。
3-n-04	能熟練三位數乘以一位數的直式計算。	3-n-03	能熟練三位數乘以一位數的直式計算，並解決二位數乘以二位數的乘法問題。
3-n-05	能理解除法的意義，運用 $\div$ 、 $=$ 做橫式紀錄(包括有餘數的情況)，並解決生活中的問題。	3-n-04	能理解除法的意義，運用 $\div$ 、 $=$ 作橫式紀錄(包括有餘數的情況)，並解決生活中的問題。
3-n-06	能熟練三位數除以一位數的直式計算。	3-n-05	能熟練三位數除以一位數的直式計算。
4-n-12	能用直式處理二位小數加、減與整數倍的計算，並解決生活中的問題。	4-n-11	能用直式處理二、三位小數加、減與整數倍的計算，並解決生活中的問題。
5-n-01	能熟練整數乘、除的直式計算。	4-n-02	能熟練整數加、減、乘、除的直式計算。
5-n-11	能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。	5-n-09	能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。
5-n-12	能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。	4-n-10	能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。
6-n-06	能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。	6-n-04	能用直式處理除數為小數的計算，並解決生活中的問題。

資料來源：教育部(2003, 2008)

由上表可以發現橫式、直式算式記錄在國小是相當重要的一個概念，其屬於「數與量」的學習內容，不論是在那個年級，都是非常重要的部分，在九十七年和九十二年版分年細目中，均針對算式記錄做了明確的定義，且有小幅度的修改，但是基本的想法都是由橫式或是直式記錄日常生活情境做起，從加減



法的直式，到了乘除的直式；從少位數的加減乘除，到多位數的加減乘除計算，進而解決生活中的問題，這在小學的課程中相當重要，因此教師必須善加規劃課程進度，讓學生能逐步增加能力，進而能實際用於日常生活中。

### 三、教師團體對話背景

數學教師專業對話團體中，第一次活動的主軸是進行國小數學「低年段」教與學問題探討，在談到低年級的數學教學上曾遇到的問題時，一位目前在低年級任教的成員提到其在教學上所面臨的現象，過去學生可以用橫式記錄來處理問題，但新的課程綱要卻要求要教直式記錄，將過程給複雜化，反而造成了學生的困擾，教師也不知道該如何去介入。有成員提到或許是學生尚未建立位值概念，因此在橫式記錄時與直式記錄時就會有落差，也有成員覺得既然會混淆，就不應該教給學生，促進者則進一步帶大家探討橫式記錄與直式記錄的差異性。「橫式、直式算式記錄的差異」議題隸屬於低年級，從「數、量、形」三大數學主題來區分，則屬於「數」主題之整數概念。

## 貳、學習問題

### 一、直式算則的意義

### 二、橫式與直式之使用時機

## 參、經驗分享

### 一、直式算則的意義

在數學教師專業對話團體低年級對話中，成員提到關於直式記錄與橫式記錄的問題，以往教學多半只有橫式，但因為正綱中又出現了直式記錄，因此成員們對於直式記錄提出了以下討論：

燕 師：現在的教學又要教直式，以  $23+56$  來說，課本上可能會先算 20 加上 50，等於 70，然後先加 3 再加上 6。

滋 師：會分解的。

燕 師：對，就是可能是先十位再個位這樣，然後我會先跟小朋友講這是怎麼來的。

錦 師：妳是教一年級嗎？

燕 師：二年級。

錦 師：二年級？二年級有教到直式？

實

務

篇



如 師：現在有。今年換過來了。

錦 師：有沒有特定哪一個版本有出現？

如 師：沒有，但能力指標有說，且今年的課程已經有了。

燕 師：我今年有去參加過一個九年一貫的研習，它有放進來。其實我們在做這個時候，很明顯就是個位對個位、十位對十位，當然教分解的方法我會，可是我覺得它是把直式加法複雜化。

課本上教導直式算式時，會先以分解的方式來開始引入，例如  $23+56$ ，會用  $20+30$ ，再加上  $3+6$ ，也就是會將兩數拆成十位數與十位數的相加，以及個位數與個位數的相加，使用將兩數分解的方式來告訴學生算法，但是有教師認為這樣反倒會使直式複雜化。另外，成員們也提到關於直式計算的問題，此時促進者加入了討論：

錦 師：92 新綱裡有教到直式計算的嗎？

促進者：正綱裡面現在是二年級。

促進者：可是二年級的課本還是暫綱的，只有一年級才是正綱的啊！

錦 師：對呀！

促進者：所以很多學校都是先教。

如 師：今年二年級的在一年級時，課本裡是沒有，可是有另外一本補充教材裡有提到，今年的一年級教材沒有補充教材，就直接把它放進課本當中。

促進者：其實這也沒錯，它其實只是一種過程式的紀錄，我們反而叫做視窗型的紀錄，不能叫做直式算則，這個跟橫式不一樣，橫式的等式要左右都等。它的意思是 23 加 56，我可以是 20 加 50 是 70，直式在這個格式上比較鬆散，但是我覺得這個課本紀錄呢，其實應該把 20 跟 50 那個拿掉。

如 師：對，我一直覺得要拿掉。

促進者：它是把這個分成是 70，所以其實以前是 82 年部編本的話，只是先把那個 3 跟 6 圈在一起，表示那個我先不算，所以部編本雖然跟隨孩子的想法，這個地方主要的是兒童的解法是從大位做，可是直式算則是從小位做，這就是算則跟解題不一樣的地方，這才是造成孩子真正衝突的地方。

促進者對直式記錄提出了解釋，認為直式算則其實只是一種過程式的紀錄而已，就如同視窗般呈現計算的過程，並不需要有嚴格的格式定義，而是把所需部分清楚表現就好。但會讓學生衝突的地方在於一開始課本教給學生的分解是從大的位數開始，但是直式算則卻是從小位數做起，這是兩者不一樣的地方，也易造成學生困擾，因此教師必須跟學生說明其中的差異與不同。



## 二、橫式與直式之使用時機

學生會先學習到的是橫式的做法，因此到了直式時會有變複雜的狀況發生，因此教師所要做的是幫助學生區分使用的時機：

如 師：這種格式對學生來講，他們都搞不清楚。

促進者：很複雜，本來格式應該是要幫助他簡化的。

守 師：紀錄變的複雜，低年級熟悉之後，中年級老師又要再花時間去把他再糾正過來。

如 師：像我們會跟學生說要理解這個，因為橫式會分段，讓他可以算出來。

錦 師：那橫式算式也是這樣子嗎？

如 師：不是，假設 23 加 56 的話，有些小朋友會 20 加 50，等於 70，或者是 23 加 6，70 加 9。

月 師：對，他們就會很清楚了，

如 師：所以變成直式他們反而搞不清楚。

成員對於格式的複雜，認為會造成學生的負擔，低年級時是用直式記錄的方式，但到了中年級卻要改成直式算則，教師必須再花時間去改正學生的作法；使用橫式時學生會用湊數的方式來讓數字簡化，學生容易理解，但變直式時卻會有大位數小位數分別加起來的作法，反而變的複雜讓學生搞不清楚，因此，成員們針對這問題進行了下列討論：

如 師：從建構式出來之後，這個過程就一直存在著。

月 師：建構的目的是要給學生很自然的想法，就像我們在算錢的時候就是利用加法。

月 師：如果照建構來講的話，是先要有直式的紀錄，然後才有直式的算則。直式的算則應該要在他橫式都會了、都理解了，才去教直式算則，所以你最後是要教這個正確格式。但是你要先這些系統完再教這個，它的引導力就先出來。

守 師：所以你剛剛說，橫式是教孩子概念，然後到後來直式只是幫他有一個圖像？

滋 師：做記錄。

守 師：對，直式只是方便他做計算，既然它的功能是幫他做紀錄，那我們是要簡單的紀錄就好，還是需要繁複的紀錄？還是，這兩種紀錄哪一種功能可以簡單的紀錄就能達到呢？

月 師：假設這個是學生自發的，你就同意他，但學生若沒有到這個步驟，就不要去影響他。讓他們能依自己能力成長。

實

務

篇



直式是來自於建構式的數學，是幫助學生建立圖像的方式，應是把橫式的算則學會理解後，接著有直式的紀錄，最後直式的算則才會出現，是需要系統性引入這些概念給學生的。橫式方法是在教學生概念，而直式則是建立一個圖像來幫助學生紀錄與計算，此兩種方式應是互相配合的，才能讓學生更清楚的理解數的計算。

## 肆、理論與實務

在數學教師專業對話團體的全體討論中，討論的議題接續了小組對於橫式、直式算式記錄的對話，成員們將在小組中討論的問題提出來後，促進者對於此議題做了一番說明：

促進者：舉個  $23+18$  等於多少這樣的例子，……，如果我是用算式填充題佈題或者用情境題佈題，那麼當然我一定讓它還在有具體物的情況之下，…開始幫助學生慢慢抽象化，對不對？然後教師可能發現學生在這裡的算式紀錄會怎麼記錄呢？可能是  $20+10$  等於  $30$ 、 $3+8$  等於  $11$ ，也就是這個時候的算式紀錄是在他湊  $10$  的想法之下進行的，當然這種紀錄不是唯一的，因為他也可以  $23+10$  等於  $33$ ， $33+8$  等於  $41$ ，……，學生在數數的行為上是十十一數，所以他可以拿所有的十出來數，也可以把  $23$  當一個前面的數來算，這就叫做序列性合成運思，往上數的策略對不對？所以他可以從  $23$  向上數  $10$  數到  $33$ ，所以在這個時候，其實直式不那麼急著介入的話也不會怎麼樣的。

促進者解釋了像算式填充題這樣的類型，要用情境佈題的方式來幫助學生思考，也就是要有具體物的呈現會比較容易進入，再幫助學生慢慢抽象化；算式記錄的思維可以用十個十個一數，也就是把數字湊成十來計算，也可以是把一個數當基數，再漸漸向上加，這就叫序列性合成運思，是使用向上數的策略進行的。所以其實直式是可以先不出現的，但由於各版本通常都先把直式放在前面教，因此促進者對於直式作了下列解釋：

促進者：剛剛 B 組提出的直式問題作法， $23+18$  變成  $30+11$  等於  $41$  這種直式，這種直式我們叫做視窗型的直式，……這過程是在建構式數學時期出現的，可是你可以看到很多老師就把這個當作標準解法，這就是問題所在，這個只是符合孩子的想法的紀錄，但並不是適合的算式方法。如果數字變大了，破百了，我們會開始將位值概念帶進來，這個時候才比較適合引入直式。



在建構式數學提出的直式記錄是一種符合學生思維的方法過程，但並不是一種標準的解法，另外，直式最適合出現的時機應該是學生有位值概念之後，從個位、十位、到了百位之後，這樣子才適合引入直式的方法。另外，學生的直式記錄跟直式算則是不同的。

促進者：自然發生的學生點數行為跟直式算則有什麼地方不一樣呢？為什麼學生在這裡會出現困難？這是因為直式算則都是從第一位算起，可是學生的自然點數的行為，都是從大數去做。

學生自然行為的加總是從大數開始的，但是直式算則是從個位開始加的，因此學生在這個地方就會發生落差，促進者又進一步解釋：

促進者：所有的直式算則，除法以外，加、減、乘都是從個位往前做；可是學生，所有學生的加跟減都是從高位去處理，所以這就是學生為什麼直接學直式算則困難的地方，……，從數概念的發展來說，比如說50以內的數，35來說的話，學生在數概念上有三個層次，他是從35個一，變成10、20、30、31一直到35，是又十又一的概念，然後再下來才是3個十、5個一，學生學這個是有層次的，那從學生認知發展來看的話，這樣的時候學生是一個基數概念，……，這裡的十是很有學問的，因為學生已經把10個1變成1個10，這就是部份-全體運思。

直式記錄應建立在學生已有進位概念之後，其作法是從個位數開始往十位、百位做，是一種遞迴的方式，來反覆進行計算；學生的運思概念發展程序是從序列性合成運思開始，再到累進性合成運思，此時學生已有累一、累十的概念，就可以較快理解其意義，而這裡使用的直式記錄為視窗型直式，而非直式算則，教師需要讓學生清楚知道此兩者的不同，避免學生的困擾與誤解。

## 伍、綜合歸納

一、橫式的功能跟直式有什麼不一樣？這是必須先區分清楚的問題，橫式是一種記錄，而直式則是在計算數的大小範圍。在教數的加法時，像點數、運算是有層次的，如果是在20或15以內，雖然此時在學生的腦海中沒有所謂的個位、十位的概念，也會說出15這個數字，但他的層次是15個1，若此時教師利用數數讓學生做加減，例如 $6+7$ ，學生會用積木數，而得到「 $6+7=13$ 」，這時如果要做算式紀錄，學生通常會作橫式的算式記錄，因為橫式就是怎麼說就怎麼記，只是紀錄問題跟結果，在數字小的時候可

實

務

篇



以用數數的方式算出來。但如果數字變大了，例如 50 以上，就有必要教導直式的做法。

- 二、若是在數字小時做一些合成活動，這時直式的功能沒有發揮，因此不需要用到直式記錄。直式的功能是在進位的時候使用，像  $6+7$  還不需要用到進位概念，所以即使用直式記，也不會發揮什麼功能，因此此階段不教直式也不會影響整個教學。但進一步將數字擴大到 50 以上，例如要做  $23+18$  這樣需進位的問題時，如果是用算式填充題或者用情境題佈題，那麼當然是在有具體物的情況之下，老師開始要幫學生慢慢抽象，此時，學生在這裡的算式紀錄可能會記成  $20+10$  等於 30、 $3+8$  等於 11，也就是此時的算式紀錄是在他湊十的想法之下，當然這種紀錄不是唯一的，因為他也可以  $23+10$  等於 33， $33+8$  等於 41，也就是符合團隊中教師們的看法，學生在數數的行為上是十個一數，所以他可以所有的十拿出來數，或是也可以 23 當成一個基數，從 23 數 10 到 33 使用向上數的策略，這稱為做序列性合成運思。
- 三、由於不同教材版本的關係，直式可能會先被引入，所以可能在這裡就會出現直式記錄，亦即「 $23+18=30+11=41$ 」這種直式。這種直式我們稱為「視窗型的直式」，過去的建構式數學就常有這類過程產生。必須要強調的是，當教師將位值概念帶進來之後，才比較適合引入直式記錄，有了進位觀念後才能使得直式記錄有意義。
- 四、直式記錄應建立在學生已有進位概念之後再教導，才符合學生的學習順序性；而學生的運思概念發展程序是從序列性合成運思開始，再到累進性合成運思的；無論是使用直式或橫式，重點是要讓學生能理解其差異以及使用方法，才能讓學生實際習得此能力。